Reserva de derechos de autor: 04-2019-1030-16243300-203 ISSN: 2683-264X

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx
Ciudad de México. México. No. 2. Enero-Junio 2020

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología.**

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS:

- **Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones.**

Leopoldo Viveros Rosas, Marco Ivan Rivera Bazan; Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández y José Roberto Pérez Torres.

- **APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas.**

Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.

FENÓMENOS DE CORTE SOCIAL, ANTROPOLÓGICO Y COGNITIVO

- **El uso de las funciones en el fortalecimiento de las operaciones básicas en alumnos de secundaria.**

Efraín Valencia Calzadilla.

- **Diseño y validación de instrumentos para la medición de conocimientos matemáticos en secundarias: experiencias y propuestas didácticas exitosas de practicantes normalistas en matemáticas.**

Isabel Viridiana Mendoza Nava, Lilly Yael Vargas Melesio, Mariana Rodriguez Barrios, Monica Marisol Hernandez Garcia, Alejandra García Aguilar, Barbara Sarahi Vega Corona y Marcos Fajardo Rendón (coord.).

EN OPINIÓN DEL DOCENTE

- **Cómo no enseñar conservación de la masa.**

Sealtiel Pichardo Jiménez.

EN OPINIÓN DEL ESTUDIANTE

- **Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas.**

Nayeli Lopez Tailes.

- **Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.**

Jaime William Flores Tecalco

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Efraín Valencia Calzadilla
Sealtiel Pichardo Jiménez
Gregorio Montes de Oca Godínez
Areli Guadalupe Mateos Sanchez

COMITÉ CIENTÍFICO

Vitaliano Acevedo Silva
Marleny Hernández Escobar
Enrique Salazar Peña
María de Jesús Sentiés Nacaspac
Raciel Trejo Reséndiz

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 2, Enero-Junio 2020, es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 01 de junio de 2020.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 2

Enero-Junio de 2020

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 2, enero-junio de 2020, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor **3**

OBJETOS MATEMÁTICOS

Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología. **6**
Brief note on compact spaces and metric spaces in Topology.
Francisco Guillermo Herrera Armendia

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones. **9**
Evaluation of QFD alternatives with uncertain results through decision analysis.
Leopoldo Viveros Rosas, Marco Ivan Rivera Bazan; Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández y José Roberto Pérez Torres.

APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas. **17**
APP and LSM mathematical dictionary to learn Geometry for inclusive elementary schools.
Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.

FENÓMENOS DE CORTE SOCIAL, ANTROPOLÓGICO Y COGNITIVO

El uso de las funciones en el fortalecimiento de las operaciones básicas en alumnos de secundaria. **21**
The use of functions to increase the learning of basic operations in elementary school students.
Efraín Valencia Calzadilla.

Diseño y validación de instrumentos para la medición de conocimientos matemáticos en secundarias: experiencias y propuestas didácticas exitosas de practicantes normalistas en matemáticas. **24**
Design and validation of instruments for measuring mathematical knowledge in elementary schools: experiences and successful didactical proposals of ENSM´s mathematical practitioners.
Isabel Viridiana Mendoza Nava, Lilly Yael Vargas Melesio, Mariana Rodriguez Barrios, Monica Marisol Hernandez Garcia, Alejandra García Aguilar, Barbara Sarahi Vega Corona y Marcos Fajardo Rendón (coord.).

EN OPINIÓN DEL DOCENTE

Cómo no enseñar conservación de la masa. **50**
How not to teach conservation of mass.
Sealtiel Pichardo Jiménez.

EN OPINIÓN DEL ESTUDIANTE

Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas **54**
Combinatorial calculus in mathematics teaching.
Nayeli López Tailes.

Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas. **65**
An alternative for tracing the first ten regular polygons inscribed on a circle using deductive formulas.
Jaime William Flores Tecalco.

CARTA DEL EDITOR

En este segundo número incluimos un breve apunte sobre algunas propiedades importantes en topología, que permiten abordar el concepto de espacio de Haussdorff, y que este año se celebra el 152 aniversario de nacimiento. En la sección de Objetivos Matemáticos contamos con la aportación de un grupo de investigadores del TECNm y TESCO relativo a la Teoría de Decisiones y una interesante aportación inclusiva con TIC realizada en nuestra casa de estudios. En nuestra sección titulada Fenómenos de corte social, antropológico y cognitivo tenemos aportaciones relacionadas con el proceso de enseñanza – aprendizaje áulico y de instrumentos originales. Contamos también con la colaboración del docente frente a grupo, que vive la realidad del proceso educativo. Finalmente, incluimos en este número con la colaboración de dos de nuestros estudiantes, quienes brindan conocimientos adquiridos en su proceso de formación inicial.

Ofrecemos además, el listado onomástico de investigadores en el área de la matemática, con la particularidad de que la secuencia del nombre de los días de los años mencionados es exactamente la misma que la secuencia del nombre de los días de este 2020.

Esto permite plantear la siguiente pregunta: ¿cuál es el valor numérico que representa la probabilidad de que una persona nazca en un día muy especial de un año bisiesto, dedique su vida al quehacer matemático, fallezca en un año bisiesto y que además ambos años bisiestos tengan la misma secuencia en el nombre de los días de la semana? Hay muchos más años que tienen esta secuencia calendárica, pero no son bisiestos, es decir, que coinciden sólo a partir del 1 de marzo, por eso no los incluimos.

El domingo 12 de enero de 1936 nace Miguel de Guzmán, matemático español cuya obra destaca principalmente en la educación y la divulgación de la matemática, Autor de diversos libros de texto de temas importantes en la matemática.

El miércoles 22 de enero de 1592 nace Pierre Gassendi, filósofo, científico y matemático. Además de ser el primer científico registrado en observar el tránsito de Venus, su obra matemática se distingue en el aspecto filosófico. Interactuó mucho con Mersenne.

El viernes 31 de enero de 1896 nace Sofya Yanovskaya, matemática rusa cuyas aportaciones incluyen buenos trabajos en la filosofía de la matemática y de la lógica, entre otros.

El domingo 2 de febrero de 1896 nace Kazimierz Kuratowski, matemático polaco y sus principales contribuciones en el área matemática se enfocan en la Topología y la teoría de Conjuntos, además de contribuir también en investigaciones relacionadas con espacios compactos y espacios métricos. También realizó importantes contribuciones al a Teoría de Grafos.

El miércoles 12 de febrero de 1908 nace Jacques Herbrand, matemático francés cuyas principales contribuciones se centran en la teoría de clase de campos.

El jueves 13 de febrero de 1992 fallece Nikolái Bogoliúbov, matemático ruso-ucraniano. Sus aportaciones se enfocan en la física matemática con la denominada transformación de Bogoliúbov identificada como un isomorfismo de las álgebras de relaciones de conmutación y anticonmutación canónicas y cuya aplicación se dirige a la diagonalización de hamiltonianos con el propósito de brindar una solución estacionaria a la ecuación de Schrödinger.

El viernes 14 de febrero de 1744 fallece John Hadley, matemático y astrónomo británico y que realizó importantes contribuciones en astronomía.

El domingo 16 de febrero de 1992 fallece Herman Wold, matemático sueco. Se dedicó a la estadística matemática pues contribuye al desarrollo del Teorema Cramer-Wold que caracteriza la distribución normal. En economía contribuyó al desarrollo de la Teoría de la Utilidad y a la Teoría de la Demanda del Consumidor. También aporta avances al desarrollo del método de los mínimos cuadrados parciales (PLS) por sus siglas en inglés, entre otras obras de importancia.

El domingo 15 de marzo de 1868 nace Grace Chisholm Young, matemática inglesa. Asistió a la prestigiada Universidad de Gotinga en la que trabajó sobre la ecuación que determina la trayectoria cometaria. Como estudiante de Félix Klein publicó varios artículos de investigación relacionados con la teoría de funciones de una variable real y el ensayo sobre derivadas infinitas con el que fue galardonada.

El domingo 29 de marzo de 1772 fallece Emanuel Swedenborg, filósofo y matemático sueco quien escribió “El inventor del Norte, o nuevos experimentos en matemáticas y física”.

El domingo 29 de marzo de 1896 nace Wilhelm Ackermann, matemático alemán con importantes contribuciones en lógica matemática y la Teoría de Conjuntos.

El miércoles 22 de abril de 1592 nace Wilhelm Schickard, matemático alemán, creador de la primera máquina de calcular que facilitaron mucho sus cálculos astronómicos, al apoyarse en esta tecnología que ahorraba mucho tiempo en las laboriosas operaciones aritméticas. También hizo importante contribuciones a la astronomía.

El lunes 27 de abril de 1936 fallece Karl Pearson, matemático y académico británico, sus aportaciones principales se enfocan a la estadística aplicada a los aspectos de la herencia y la evolución biológicas.

El martes 28 de abril de 1868 nace Georgy Voronoi, matemático ruso. Realizó importantes aportaciones a la matemática pura como es el caso de la teoría general de enteros algebraicos, con el caso particular de números que dependen de la raíz de una ecuación irreducible de la forma r^3=rx+s; además aportó la idea que hoy se conoce como el diagrama de Voronoi.

El 28 de mayo de 1676 nace Jacopo Francesco Riccati, matemático italiano. Además de escribir tópicos relacionados con filosofía y física su aportación a la rama matemática se centra en las ecuaciones diferenciales, por ejemplo su método para la separación de indeterminantes en algunas de ellas, trabajó arduamente en las ecuaciones que se pueden integrar con transformaciones algebraicas adecuadas, a diferencia de aquellas que requieren el cambio de variable

El martes 25 de agosto de 1964 nace Maxim Kontsevich, matemático ruso. Entre sus aportaciones, destaca una de las más completas descripciones sobre la prueba de una conjetura propuesta por E. Witten, relativa al cálculo de la intersección de números de clases estables, idea introducida por Munford que involucra la compactación de espacios modulares de curvas algebraicas g- genus con puntos marcados.

El miércoles 26 de agosto de 1964 fallece Sixto Cámara Tecedor, matemático español. Sus principales aportaciones a la matemática se centran en la Geometría Sintética, Geometría Analítica, Estadística y en el campo de la física en la balística.

El viernes 28 de agosto de 1744 nace Agustín de Pedrayes, matemático español que en el último tercio del siglo XVIII propuso un método para la solución de ecuaciones.

El martes 1 de septiembre de 1648 fallece Marin Mersenne, matemático francés que dedicó gran esfuerzo al estudio de lo que hoy se conoce como la Teoría de Números. Hoy su trabajo se conoce como los números primos de Mersenne, de la forma 〖n=2〗^p-1; p,n números

primos; cumple para p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257, pero no para los otros 44 números primos p menores que 257. En la actualidad sigue siendo de interés esta forma numérica.

El lunes 7 de septiembre de 1936 fallece Marcel Grossmann, matemático húngaro; entre sus principales trabajos resalta la colaboración que tuvo con A. Einstein al publicar un trabajo sobre la Teoría de la Gravitación y que es uno de los fundamentos de la Teoría de la Relatividad. También destaca su aportación a la Geometría Descriptiva.

El sábado 26 de septiembre de 1868 fallece August Möbius, matemático y astrónomo alemán con numerosas contribuciones la matemática, por ejemplo la Teoría Geométrica de los Poliedros.

El martes 6 de octubre de 1908 nace Serguéi Sóbolev, matemático ruso. Entre sus aportaciones, destaca su propuesta sobre el método variacional estándar para la solución de problemas de valor límite elípticos, la función de espacios de Sóbolev. Publicó en 1950 el afamado texto denominado "Aplicaciones del análisis funcional a la física matemática", en lengua rusa.

El viernes 23 de octubre de 1908 nace Iliá Frank, físico y matemático soviético, premio nobel de física en 1958. Aunque sus contribuciones se centran en el área de la física, realizó un importante trabajo con relación a la explicación teórica (en lenguaje matemático) acerca del fenómeno relacionado con el desplazamiento de partículas cargadas en un medio transparente y a velocidades mayores que la de la luz.

El domingo 8 de noviembre de 1868 nace Felix Hausdorff, matemático alemán quien realizó importantes contribuciones a la Teoría de la Medida.

El sábado 14 de noviembre de 1716 fallece el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz cuyas aportaciones en matemáticas son muy conocidas, además de ser fundamentales.

El viernes 20 de noviembre de 1908 fallece Georgy Voronoi, matemático ruso. Algo de su aportación la mencionamos en la fecha correspondiente al 28 de abril. Como dato curioso, nace y fallece en años con secuencia calendárica idéntica.

El viernes 25 de diciembre de 1908 nace el matemático sueco Herman Wold cuya obra destacamos en el onomástico de su fallecimiento, y como dato curioso nace y fallece en años con idéntica secuencia calendárica.

El listado abarca un ciclo y algunos años más del calendario salamantino (Carabias Torres, Ana María. (2012) Salamanca y la Medida del Tiempo. Ediciones Universidad de Salamanca), popularmente conocido como calendario gregoriano. Este ciclo es de 400 años y fue todo un trabajo matemático su elaboración.

Referencias de Apoyo:
Encilcopedia Britanica, Edición 1981.
Referencias digitales:
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/
https://efemerides20.com/

Los editores.

Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

***Resumen*- En esta ocasión describo algunas propiedades de la topología general que son fundamentales para iniciar el estudio de esta rama de la matemática moderna, desde el punto de vista axiomático. En algunos casos ofrezco la prueba de los enunciados que describen estas propiedades para tratar el concepto de filtro en los espacios topológicos. Hago énfasis en el concepto de espacios compactos, debido a la importancia que posee.**

***Palabras Clave*- espacios topológicos, espacios compactos, filtros, teorema Heine-Borel.**

***Zusammenfassung*-Dieses Mal beschreibe ich einige Eigenschaften der allgemeinen Topologie, die grundlegend sind, um das Studium dieses Zweigs der modernen Mathematik unter axiomatischen Gesichtspunkten zu beginnen. In einigen Fällen biete ich einen Beweis für die Aussagen, die diese Eigenschaften beschreiben, um das Konzept des Filters in topologischen Räumen zu behandeln. Ich betone das Konzept der kompakten Räume aufgrund seiner Bedeutung.**

***Schlüsselwörter* - topologische Räume, kompakte Räume, Filter, Heine-Borel-Theorem.**

***Резюме* - В связи с этим я опишу некоторые свойства общей топологии, которые являются фундаментальными для начала изучения этого раздела современной математики с аксиоматической точки зрения. В некоторых случаях я предлагаю доказательства утверждений, которые описывают эти свойства, чтобы иметь дело с понятием фильтра в топологических пространствах. Я подчеркиваю понятие компактных пространств, из-за важности, которую это имеет.**

***ключевые слова* - топологические пространства, компактные пространства, фильтры, Теорема Гейне-Бореля.**

***Mathematical Subject Classification:* 53-02.**

I. Introducción

Algunas propiedades topológicas [1].

Definición 1.

$f: X \to Y$ es un mapa $\wedge(f)x = x \longrightarrow x$ está fijo por f, es decir x es un punto fijo de f.

Consecuencia 1.

Se tiene una propiedad topológica cuando se afirma que X tiene la propiedad del punto fijo.

Consecuencia 2.

El intervalo [0, 1] tiene la propiedad del punto fijo.

Prueba.

Supongamos que $f: [0,1] \to [0,1]$ es un mapa contínuo. $f(0) = 0 \ \vee f(1) = 1 \ \longrightarrow \exists\, P_F$, Punto Fijo. Así se habrá probado lo anterior. Pero, si $f(0) > 0 \wedge f(1) < 1$, entonces se define una nueva función $g(x) = f(x) - x$. Es así que $g(0) > 0 \wedge g(1) < 0$. Por el Teorema del valor medio, se garantiza que un existe un punto c entre 0 y 1 de tal forma que $g(c) = 0$, es decir $f(c) = c$. Entonces c es el punto fijo de f

Definición 2.

Una ruta en un espacio topológico Xes la imagen de una función contínua $g: [0,1] \to X$. Si cualquiera dos puntos en el espacio X se pueden unir por una ruta en X, entonces este espacio X es una ruta conectada R_C.

Consecuencia 3.

$f: X \to Y$ es contínua $\wedge\, X$ es $R_C \longrightarrow f(X)$ es una R_C. Por ello, la ruta de conectividad es una propiedad topológica.

Definición 3. Conectividad.

La noción de conectividad pone de manifiesto las siguientes cualidades: Sea un conjunto A. Éste está conectado si no existen conjuntos $U \wedge V$ abiertos en X que cumplan lo siguiente:

a) $A \subseteq U \ \cup V$
b) $A \cap U \ \neq \emptyset$
c) $A \cap V \neq \emptyset$
d) $U \cap V \cap A \neq \emptyset$

Definición 4.

La imagen contínua de un espacio conectado está conectada. En consecuencia la conectividad es una propiedad topológica. Esta proposición es una generalización del Teorema del valor Medio, que al interpretarlo en el presente contexto especifica que cuando un intervalo está conectado, su imagen contínua también lo está. Por ejemplo, sea m un valor cualquiera. Si este valor se localiza entre $f(p)$ y $f(q)$ entonces m está en la imagen de $[p, q]$, es decir que un punto c existe entre p y q tal que $f(c) = m$.

Consecuencia 4.

Si un subconjunto A de un espacio cualquiera está conectado y x es un punto límite de A, entonces $A \ \cup \{x\}$ también está conectado.

Prueba.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Supongamos que U y V son conjuntos abiertos no conectados $A \cup \{x\}$. Debido a que A está conectado, entonces está completamente contenido en U o también completamente contenido en V. Por lo tanto x debe estar en el otro conjunto, es decir: $A \subseteq U \ \wedge \ x \ \in \ V$. Pero esta aseveración contradice que x sea un punto límite de A, ya que V es un conjunto abierto que contiene a x pero no contiene al conjunto A. De ahí que no existen los conjuntos discontínuos U y V, lo que prueba la consecuencia anterior.

II. Noción 1. Compactación o Compresión.

Un subconjunto de R^n es compacto si está cerrado (que contiene todos sus puntos límite) y limitado (que está contenido en un enjambre o aglomeración de algo, cuyo radio es posiblemente muy largo). Por ejemplo, R^1 no es compacto debido a que no está limitado. El intervalo (0, 1) tampoco es compacto porque no está cerrado. Sin embargo, el intervalo [0, 1] está tanto cerrado como limitado, por ello, es compacto.[1] [2] [3].

III. Noción 2.

Si X es un espacio topológico, una colección de conjuntos $\{U_\alpha \downarrow \alpha \in A\}$, y cada uno de ellos abierto en $X \longrightarrow \exists\, C_a$ (cubertura abierta) de X, si $X = \cup_{\alpha \in A} U_a$. Además, el espacio Xes compacto si, para cada cubertura abierta de X, existe una subcolección finita de $\{U_\alpha\}$ que también es una cubertura abierta de X. En otras palabras, existen infinitos conjuntos U_α cuya unión es todo X.

En términos de los espacios euclidianos, las nociones previas tienen sustento axiomático en el Teorema Heine-Borel [4] [5], que describo en las preposiciones 1 a y 1 b.

Proposición 1.

a) Un subconjunto $A \in \mathbb{R}^n$ está cerrado y limitado sí y sólo sí cada cobertura abierta de A contiene una subcolección finita cuya unión pertenece completamente al conjunto A. [1].
b) Los subconjuntos compactos de un espacio euclidiano R^n son precisamente los que están cerrados y limitados [6].

Consecuencia 5.

Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff [7].

Proposición 2.

Supongamos que K es compacto (noción 1), y F es un conjunto cerrado, en un espacio topológico X. $F \subset K \ \rightarrow F$ es compacto [6] [8].

Prueba: Si $\{V_\alpha\}$ es una cobertura abierta de F y $W = F^c$, entonces $W \ \cup \ \bigsqcup_{\alpha} V_\alpha$ cubre al conjunto X; de ahí que exista una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$ tal que $K \ \subset W \ \cup \ V_{\alpha_1} \ \cup \ \ldots \ \cup \ V_{\alpha_n}$. Entonces tenemos que $F \ \subset \ V_{\alpha_1} \ \cup \ \ldots \ \cup \ V_{\alpha_n} K \ \subset W \ \cup \ V_{\alpha_1} \ \cup \ \ldots \ \cup \ V_{\alpha_n}$

Escriba aquí la ecuación.

Corolario 1.

$Si\ A \subset B\ y\ si\ B$ posee cerradura compacta, entonces el conjunto A posee cerradura compacta [6].

IV. Noción 3.

Según Frechet, un espacio topológico se llama compacto si cada conjunto finito de puntos tiene al menos un punto de agrupación [5].

V. Noción 4.

Un espacio métrico es compacto solo si y cada secuencia de puntos contiene una secuencia parcial convergente [5].

Como consecuencia directa de ello se afirma que un espacio métrico compacto es en general, un compacto y que presenta las siguientes características:

a) Cada secuencia decreciente de conjuntos cerrados no vacíos $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k$ ... tiene un conjunto promedio no vacío (promedio de Cantor) [5].

b) Propiedad de cobertura débil de Heine – Borel. Cada cobertura abierta medible de un espacio compacto *R*, contiene una cobertura finita (del mismo espacio). Un término convencional comúnmente utilizado para los espacios compactos medibles es el término *compactum*.

Ahora, abordemos la definición de espacio topológico compacto en términos del concepto de *filtro* [9].

Definición 5.

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es una familia no vacía de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones:

a) $F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
b) $F_1 \ \cap \ F_2 \ \in \ \mathcal{F} \ \forall\, F_1 , F_2 \ \in \mathcal{F}$.
c) $F \ \in \ \mathcal{F} \ \wedge \ F \ \subset G \ \rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Definición 6.

En un espacio topológico (R, τ), el punto p es adherente al filtro $\mathfrak{a}$, si $\mathfrak{a} \wedge \ \tau p \neq \mathfrak{o}$, donde $\mathfrak{a}$ representa un filtro y $\mathfrak{o}$ representa un filtro cero o nulo y τ espacio topológico [9].

Para ello se cumplen las siguientes condiciones:

a) p es un punto adherente a $\mathfrak{a}$.
b) Existe un filtro $\mathfrak{b}$ convergente con p y que además satisface: $\mathfrak{o} < \ b \leq \ a$.
c) El filtro principal generado por el punto $\overline{p} \leq \dot{\mathfrak{a}}$ (cerradura al filtro $\mathfrak{a}$).

Prueba.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Si p es adherente a $\mathfrak{a}$ entonces el filtro $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \wedge \tau p$ cumple la condición (b). Si $\mathfrak{o} < b \leq a$ y además si $\mathfrak{b} \leq \tau p$, entonces $\tau p \wedge \overline{A} \geq \mathfrak{b} > o$, de ahí que $p \in \dot{A}\ \forall A \in \mathfrak{a}$. Además, $\overline{p} \leq \dot{\mathfrak{a}} \rightarrow p \in \dot{A}$ por lo que $\tau p \wedge \overline{A} \neq \mathfrak{o}\ \forall\ A \in \mathfrak{a}$, y así $\tau p \wedge \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$.

Conclusión. Las proposiciones anteriores permiten abordar la siguiente idea, entre otras desde luego. Sea $R_i, i = 1,2, \ldots$ un paracompacto, T_2, M-espacios. La consecuencia directa es el producto espacial $R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$, que es paracompacto T_2, M-espacios. Un espacio R es un $M-$espacio si y sólo si existe una secuencia $\mathfrak{U}_i, i = 1,2, \ldots$, de coberturas abiertas de R que cumple las siguientes condiciones [10]: a) $\mathfrak{U}_1 > \mathcal{U}_2^* > \mathcal{U}_2 > \mathcal{U}_3^* > \cdots$, . b) Sea $\mathfrak{C}$ una colección contable y p_0 un punto de R tal que para cada i existe un miembro de $\mathfrak{C}$ contenido en $S(p_0\ ,\ \mathfrak{U}_i)$ entonces $\cap \{\overline{C} \mid C \in \mathfrak{C}) = \emptyset$.

REFERENCIAS

[1] Goodman, S. E.: *Beginning topology*: Thomson Learning Inc. (N. Y. , 2005)
[2] Roseman, D.: *Elementary Topology*: Prentice Hall Edition. (N.J.,1999).
[3] Moore, T.: *Elementary General Topology*. Prentice Hall Edition. (N. J., 1964).
[4] Bean, M. *Dictionary of Theories*: (Edited by Jenifer Bothamley). Visible Ink Edition. (Detroit, MI., 2002).
[5] Alexandroff, P.: *Topologie*: Verlag von Julius Springer. (Berlin, 1935)
[6] Rudin, W. *Real and complex Analysis*: McGraw – Hill Edition. (N. Y., 1966)
[7] Dixmier, J.: *General Topology*: Springer Verlag. (N. Y. , 1984)
[8] Ghrist, R.: *Elementary Applied Topology*: University of Pennsylvania Press. (Pittsburgh., 2014)
[9] Kowalsky, H. J.: *Topological Spaces*. Academic Press. (N. Y.,1965)
[10] Nagata, J-I. *Modern General Topology:* Springer-Verlag (N.Y. 1968),

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones.

Leopoldo Viveros Rosas[#], Marco Ivan Rivera Bazan[#]; Rebeca Díaz Téllez[#],
Mario Luis Chew Hernández[#] y José Roberto Pérez Torres[#].
[#] TECNm – TESCO, Av. 16 de septiembre 54, Coacalco, Estado de México, México.
leopoldo@tesco.edu.mx, marco_mct@tesco.edu.mx, rebeca.sub.a@tesco.edu.mx,
mario@tesco.edu.mx, jose.roberto@tesco.edu.mx

***Resumen*- En este trabajo se presenta la aplicación del análisis de decisiones para dar claridad de acción cuando se presenta incertidumbre en la selección de alternativas referentes al material utilizado para la producción de un herramental utilizado en la fabricación de pirotécnica. Se aplica el despliegue de la función de calidad (Quality Function Deployment - QFD) para transformar las verbalizaciones del cliente en variables de ingeniería y se establecen los criterios necesarios para la definición de eventos inciertos. Posteriormente se aplica análisis de decisiones para la ganancia esperada por cada material y para la utilidad subjetiva esperada. El modelo planteado permite al decisor, con ayuda del analista, modificar los valores de entrada permitiendo así la adecuación a diversos problemas similares.**

***Palabras Clave*- Análisis de Decisiones, Incertidumbre, QFD, Utilidad Subjetiva Esperada.**

Abstract- This work presents the application of decision analysis to give clarity of action when uncertainty arises in the selection of alternatives regarding the material used for the production of a tooling used in the manufacture of pyrotechnics. The Quality Function Deployment (QFD) is applied to transform the client's verbalizations into engineering variables and the necessary criteria are established for the definition of uncertain events. Later, decision analysis is applied for the expected profit for each material and for the expected subjective utility. The proposed model allows the decision maker, with the help of the analyst, to modify the input values, thus allowing adaptation to various similar problems.

Keywords- Decision Analysis, Expected Subjective Utility QFD, Uncertainty.

***Mathematical Subject Classification:* 90C70.**

I. INTRODUCCIÓN

El despliegue de la función de calidad (Quality Function Deployment) QFD, por sus siglas en inglés; es una metodología de planeación que introduce el control de calidad en la etapa del diseño y/o desarrollo de un producto o servicio; es un mecanismo formal para asegurar que la "voz del consumidor" sea escuchada y tomada en cuenta en todas las etapas del desarrollo del producto o servicio [1]. El QFD es un sistema estructurado que permite identificar necesidades y expectativas de los clientes, común mente llamada "escuchar la voz del cliente" y traducirlos al lenguaje de ingeniería ayudando de esta manera a determinar los requisitos críticos de diseño para lograr la satisfacción del cliente [2]. Por otra parte, el Análisis de Decisiones consiste en herramientas y modelos para mejorar la toma de decisiones; tiene un especial uso cuando las decisiones múltiples objetivos en conflictos y cuando las consecuencias o resultados son inciertos o presentan incertidumbre [3]. En este trabajo se presenta una aproximación de la introducción de herramientas de análisis de decisiones al QFD; en particular se introduce los árboles bayesianos de decisión y el análisis de preferencias a la evaluación de alternativas de diseño.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

En [4] se presenta una revisión analítica de la literatura sobre artículo publicados referentes a QFD difuso (FQFD) entre 2000 y 2011, llegando a las siguientes conclusiones: La mayoría de los estudios se centraron en métodos cuantitativos para lograr la fase 1 de QFD o casa de la calidad; las técnicas más empleadas son métodos de toma de decisiones de multicriterio. Aunque el propósito principal de usar QFD era el desarrollo de productos, otros factores como el análisis de riesgo y competitividad deben considerarse en el proceso de desarrollo del producto.

Además [5] presentan una metodología para determinar la función de transferencia en la herramienta de la casa de calidad del método de implementación de funciones de calidad. La función de transferencia relaciona las características del producto con los requisitos del cliente sobre el producto.

En [6] mencionan que el diseño es un tema interdisciplinario, por lo tanto, el proceso de diseño tiene una cierta complejidad, su trabajo muestra la combinación de EGM (método de la cuadricula para evaluación) y QFD difuso; el EGM es utilizado para analizar los requisitos del cliente y los elementos de diseño, para que con el proceso analítico jerárquico (AHP por sus siglas en inglés) se calculen los valores de peso de los requisitos del cliente y por último se establece la matriz de relaciones difusa entre los requisitos del cliente y los elementos de diseño.

Por su parte [7] por medio de un experimento ortogonal virtual proponen un método para incorporar en análisis de sensibilidad en el QFD, por medio de un software integrado crean un entorno en el que los parámetros de diseño se asignan con diferentes valores y las acciones correspondientes se supervisan en tiempo real.

Además [8] proponen un modelo de despliegue de funciones de calidad en dos etapas para identificar las tecnologías centrales desde una perspectiva basada en la demanda; después de obtener las necesidades del cliente, se utiliza el análisis de clúster para recopilar temas tecnológicos. Posteriormente construyen la matriz de relación entre temas tecnológicos y códigos manuales primarios. Finalmente, los códigos manuales secundarios se pueden calcular mediante la información de patentes en la base de datos de patentes de Derwent.

Por su parte [9] menciona la importancia que tiene el QFD como herramienta sistemática para traducir los requisitos del cliente (CR) en características de ingeniería factibles (CIF) de

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

un producto. En su trabajo se aplica la teoría de la incertidumbre al QFD, y presenta un método de valor esperado para obtener la importancia de las CIF y clasificar las entradas lingüísticas como variables inciertas; finalmente, propone ejemplo de mejora de la cámara digital donde los resultados experimentales se comparan con la situación que ignora las correlaciones entre las CIF.

Por otro lado [10] se muestra un estudio de la combinación de QFD y el método TRIZ (Theory of Inventive Problem Solving). Se desarrolla y se demuestra un marco estructural para modificar el proceso de diseño del servicio en tres fases diferentes de resolución de problemas.

También en [11] implementan un modelo de diseño innovador basado en QFD y TRIZ, donde en primer lugar, los requisitos del cliente son analizados por la Casa de la Calidad, posteriormente se identifican los problemas que deben resolverse en el diseño.

Por otro lado [12] propone una técnica de toma de decisiones grupales (GDM) integrada basada en el modelo lingüístico de duplas, el despliegue de la función de calidad (QFD) y el método de la técnica para el rendimiento de pedidos por similitud con la solución ideal (TOPSIS).

También [13] formulan la selección del proveedor de servicios de logística inversa como un problema de toma de decisiones de criterios múltiples y desarrollan una metodología para seleccionar el mejor proveedor de servicios de logística inversa para la empresa de fabricación de piezas de moldeo por inyección utilizando la técnica de preferencia de pedido por similitud con la solución ideal (TOPSIS) e integrándolo con la implementación de la función de calidad (QFD).

A su vez [14] dice que la calidad, el costo y el tiempo de desarrollo de productos tienen un impacto directo en la productividad, en la participación del mercado y en la rentabilidad de la empresa. A medida que los usuarios alcanzan mayor conciencia sobre sus deseos, es necesario mayor nivel de calidad y una respuesta en el tiempo más rápida.

III. PROBLEMA

El cohetón es un artefacto pirotécnico detonante, de forma cilíndrica y de fabricación artesanal, hecha a base de pólvora negra coloratada, confinada, en tubo de cartón y envuelta en papel. Su diámetro varia de 1 a 3 centímetros y su longitud es de 6 a 15 cm.

Actualmente en la industria de la pirotecnia de la región de Tultepec, Estado de México; específicamente en la elaboración de cohetón, un gran porcentaje se elabora de manera artesanal. Cabe mencionar que aproximadamente el 70% de la pirotecnia tomo como base principal el cohetón. Por lo general la aguja es la que sufre mayor desgaste y es este elemento que con mayor frecuencia es cambiado por uno nuevo.

A continuación, se describen los pasos para la elaboración del cohetón.

Paso 1. Colocar tubos de cartón de arranque 8.2[1].

Paso 2. Colocar placa que mantiene alineados los tubos de cartón y además ayuda para la dosificación de la arcilla como también de la pólvora (mezcla).

Paso 3. Colocar placa de nylamid[2] con los barrenos desalineados para dosificar la arcilla.

Paso 4. Llenar barrenos con arcilla (Barro) al ras de la placa.

Paso 5. Alinear las 2 placas de nylamid permitiendo que la arcilla caiga dentro de los tubos de arranque 8.2.

Paso 6. Comprimir la arcilla (Barro) ya dosificada.

Paso 7. Una vez que la pólvora comprimida ha llegado al nivel requerido se procede a utilizar la placa de nylamid con los amacizadores.

Del paso 2 al paso 7 se repite un promedio de 14 veces hasta que se tiene el nivel deseado de pólvora.

Paso 8. Dosificar la tapadura (mezcla con un poco de agua) al ras.

Paso 9. Comprimir la tapadura.

Paso 10. Botar el arranque de cohetón 8.2 ya terminado.

La Fig. 1 se muestra el producto terminado.

Fig. 1. Arranque de cohetón 8.2 totalmente terminado.

|El proceso de compresión de mezcla se hace en un dispositivo hidráulico que realiza doce compresiones simultáneas; en la Fig. 2 se muestra la parte A y B del dispositivo que sufre desgaste por fricción

[1] Los tubos de arranque 8.2 son mencionados de esa forma por el productor.

[2] Familia de las Poliamidas (PA) Nylon.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

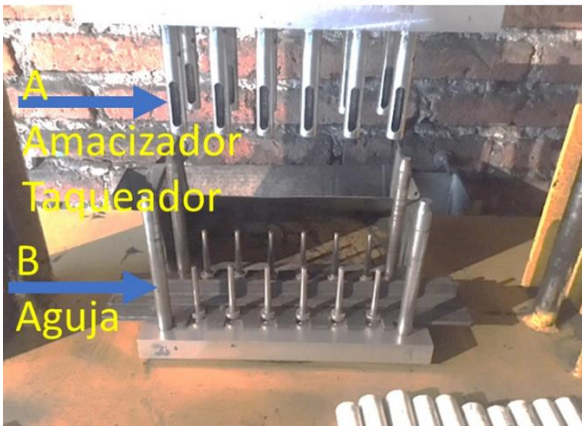


Fig. 2. Piezas que sufren desgaste por fricción.

Actualmente la aguja, el amacizador y el taqueador se producen de latón o acero inoxidable. Con el de latón se producen aproximadamente 100 gruesas antes de tener que cambiar y con acero inoxidable 300 gruesas[3].

IV. DESARROLLO

QFD

De las verbalizaciones con el cliente y la aplicación de herramientas de QFD para dar claridad a la voz del cliente, se deduce que lo que se busca es que la aguja, el amacizador y el taqueador para el proceso de compactación en la elaboración de arranque 8.2, tenga una durabilidad mayor. Como el productor maquina sus propias herramientas las características verbalizadas para el material de requerimiento son:

- Resistencia al descarbonizado.
- Resistencia al agrietamiento.
- Dureza HRC entre 40 y 50.
- Maquinable.
- Tenacidad alta.
- Resistencia al ablandamiento.
- Resistencia al desgaste.

En la Tabla 1 se muestras algunas características muy útiles que fueron el reflejo de las verbalizaciones del cliente.

Tabla 1. ALTERNATIVAS DE ACERO

Característica	Alternativa 1 (A1)	Alternativa 2 (D2)	Alternativa 3 (M2)
Resistencia al descarbonizado	Media	Media	La más alta
Resistencia al agrietamiento	La más alta	La más alta	Media
Dureza aproximada (HRC)	60 – 62	54 – 61	62 – 65
Maquinabilidad	Alta	Baja	La mas alta
Tenacidad	Muy alta	Media	Media
Resistencia al ablandamiento	Alta	Alta	Baja
Resistencia al desgaste	Media	Media	Alta

De acuerdo con la entrevista con el cliente, la importancia de los requerimientos se pondera como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. PONDERACIÓN DE REQUERIMIENTOS

Requerimientos del cliente	Peso / Importancia	Peso Relativo
Bajo costo	10	23.8
Dureza	7	16.7
Ligero	8	19
No produzca tanta chispa	8	19
La punta dure	9	21.4

La Fig. 3 muestra la "casa de la calidad" desarrollada para la selección entre las alternativas de materiales.

Se puede identificar que de acuerdo con las relaciones quedarían de la siguiente manera las prioridades para fabricar el herramental:

1. Buen material: 24.3%, Tener un buen material es lo que se busca principalmente por el cliente, dado que, si el costo del material no es elevado, sea ligero y la punta dure, entonces podrá cumplir con los requisitos del cliente

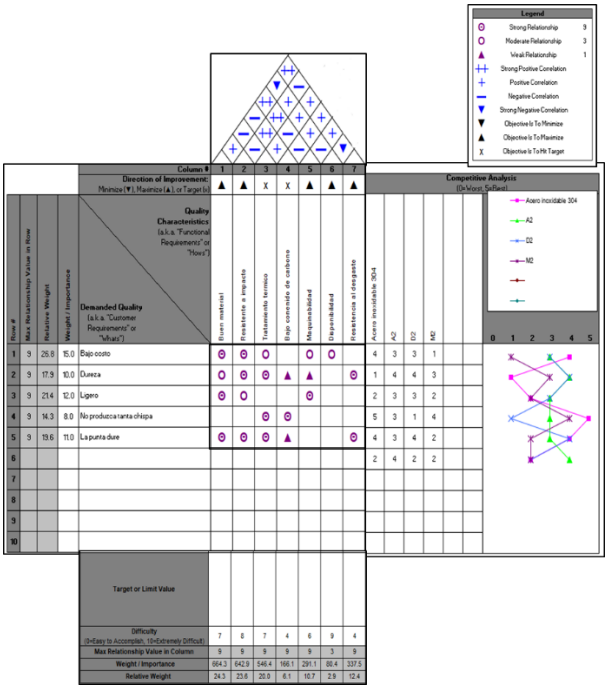


Fig. 3. Casa de la calidad para la selección de materiales.

2. Resistencia al impacto: 23.6%, la punta de la herramienta debe resistir varios impactos consecutivos.

[3] Una gruesa son 12 docenas.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

3. Tratamiento térmico:20%, si se realiza el tratamiento térmico adecuadamente se puede alcanzar las durezas propuestas por el fabricante.

4. Resistencia al desgaste: 12.4%, el material no debe desgastarse tan rápido, en especial la punta de la herramienta que es la que se encuentra en trabajo constante y es una de las problemáticas del cliente.

5. Maquinabilidad: 10.7%, debe ser de fácil maquinabilidad, ya que mientras más difícil sea, se necesitarían herramientas de corte más caras y elevaría el costo de la herramienta, siendo esto un problema para el cliente.

6. Bajo contenido de carbono: 6.1%, la ausencia de carbono en un material que produce que un material no tenga tanta dureza y en este caso no produzca chispa.

7. Disponibilidad: 2.9%, la disponibilidad dado que los materiales son comunes, tardan en promedio de 1 -2 días hábiles.

Se puede observar que los tres aceros que se manejan (A2, D2 y M2) tienen muy buenas propiedades mecánicas, pero el A2 mantiene características mecánicas que lo destacan. En la resistencia al impacto, realizada con una prueba de impacto de Entalla Charpy C, tiene una resistencia al impacto de 40 ft-lb, respecto a los 21 ft-lb y a los 20 ft-lb del D2 y M2 respectivamente. Por otro lado, una característica mecánica es la tenacidad, es la energía de deformación total que es capaz de absorber o acumular un material antes de alcanzar la rotura en condiciones de impacto, por acumulación de dislocaciones, de acuerdo con el fabricante de Aceros SISA, su tenacidad del A2 es mayor que a D2 y M2; esto es una gran ventaja ya que el material está en constante esfuerzo y hará que la punta sea capaz de soportar repetitivos golpes y se traduce en que la punta del material no se desgastará tan fácil. En cuanto al precio el del A2 y D2 son los mismos, aproximadamente de 7.35 USD/ kg, contra los 20.50 USD/kg del M2 que lo pone en desventaja porque casi es tres veces el precio de sus competidores.

ANÁLISIS A PRIORI

Para la selección del material adecuado para la fabricación de la aguja, el amacizador y el taqueador se desean considerar eventos inciertos para lo cual se desarrolla el diagrama de árbol que se muestra en la Fig. 4, donde los cuadrados representan las alternativas y las circunferencias los eventos inciertos.

Donde los eventos de exitoso y no exitoso para cada característica de calidad se define como sigue.

Tenacidad

- Exitoso: resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, mayor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

No exitoso: resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, menor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

Durabilidad

- Exitoso: mayor o igual a 300 gruesas.

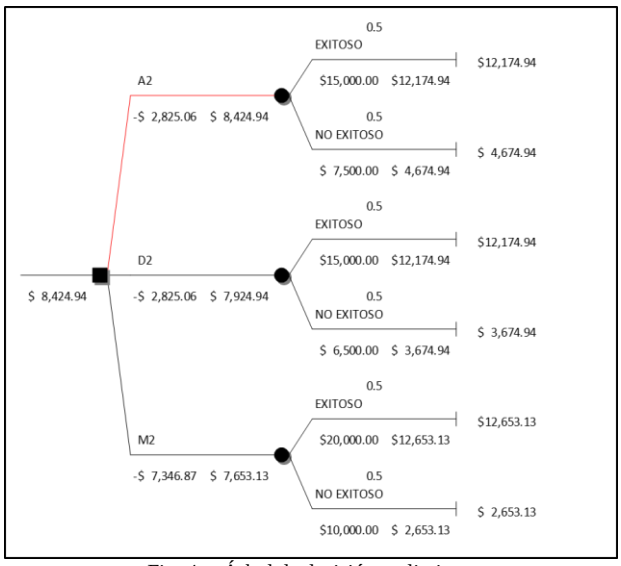


Fig. 4. Árbol de decisión preliminar.

- No Exitoso: menor a 300 gruesas.

Dureza HRC

- Exitoso: mayor o igual a 60.
- No exitoso: Menor a 60.

Costo

- Exitoso: Costo – Beneficio mayor al actual.
- No exitoso: Costo – Beneficio menor al actual.

Disponibilidad

- Exitoso: Tiempo de adquisición menos de un mes.
- No exitoso: Más de un mes.

Para el árbol de decisión preliminar, se considera una probabilidad 0.50 – 0.50 para el resultado del evento incierto Exitoso – No exitoso.

Con estos datos la mejor alternativa es seleccionar e material A2 con una ganancia esperada de $8424.94[4].

ANÁLISIS POSTERIORI

Para el análisis posteriori se recomienda desarrollar un experimento con cada uno de los materiales, para considerar un evento exitoso, el resultado del experimento debe estar por lo menos en el límite inferior de las características menos - mejor y por arriba del límite superior de las características más - mejor. Es decir, debe cumplir como mínimo[5].

- Tenacidad - resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, mayor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

- Durabilidad - mayor o igual a 300 gruesas.

- Dureza HRC - mayor o igual a 60.
- Disponibilidad - Tiempo de adquisición menos de un mes.

Considerando una eficiencia de la prueba de 90% cuando determina que el material será exitoso y un 80% cuando determina que el material no será exitoso.

En la Fig. 5 se muestra el árbol de probabilidades para actualizar la información con el teorema de Bayes.

[4] Los costos por herramienta y los beneficios son proporcionados por el productor de la localidad.

[5] La característica de costo beneficio se evalúa en el árbol.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

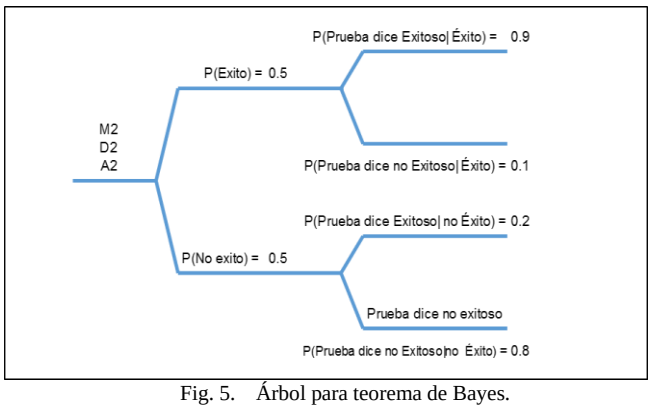


Fig. 5. Árbol para teorema de Bayes.

Es importante resaltar que para el modelo que se plantea se utiliza la misma probabilidad para cada uno de los materiales, esto puede no ser así. El modelo permite el cambio de estas probabilidades. Con la información posteriori se realizan los árboles de decisión que se muestra en las 6, 7 y 8.

Del árbol de la Fig. 6 se observa que la ganancia esperada si se prueba el material A2 es de $8,512. 44, donde el plan de acción dependerá del resultado de la prueba. Si la prueba dice que el material será exitoso, se seleccionará el material A2. Sila prueba indica que el material no será exitoso, se seleccionará el material D2.

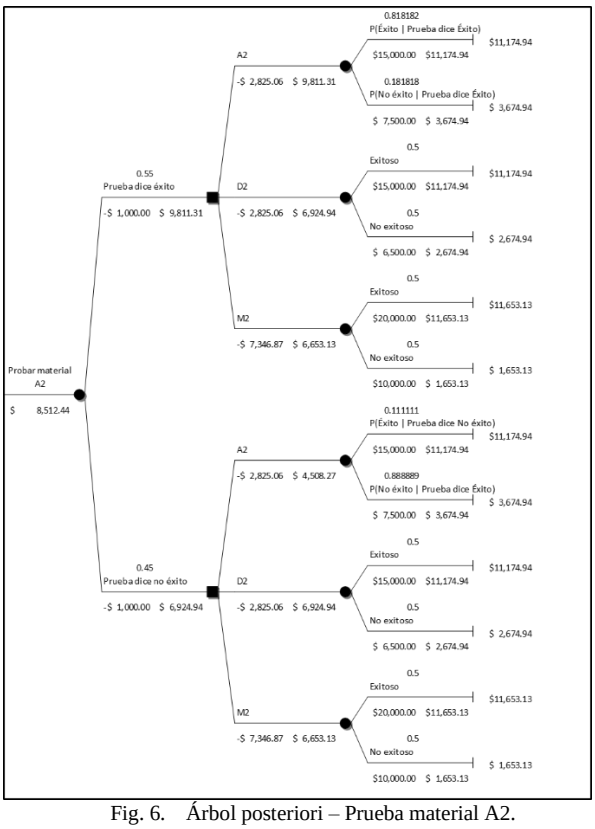


Fig. 6. Árbol posteriori – Prueba material A2.

Por otro lado, si el material que se prueba es el D2, Fig. 7, la ganancia esperada es de $8,787.44 y el plan de acción es; si la prueba dice que el material será exitoso, se seleccionará el material D2. Si la prueba indica que el material no será exitoso, se seleccionará el material A2.

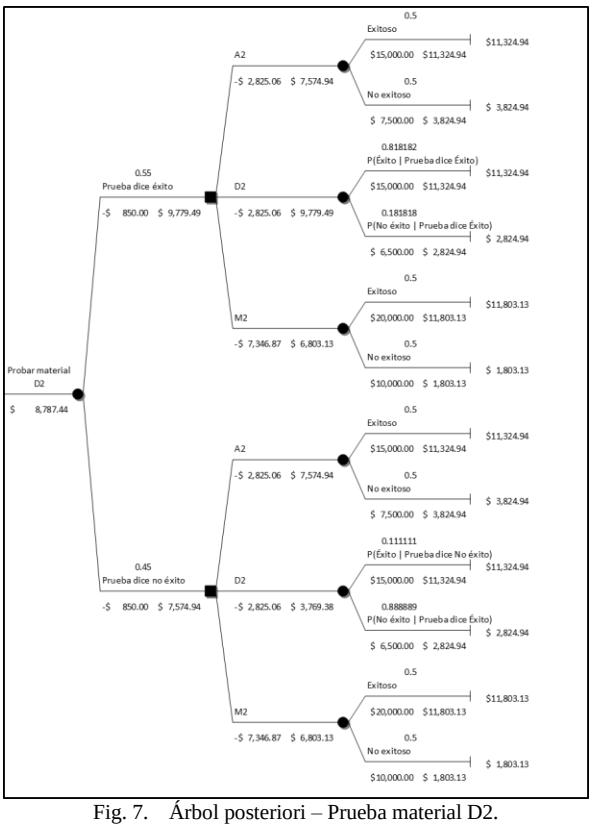


Fig. 7. Árbol posteriori – Prueba material D2.

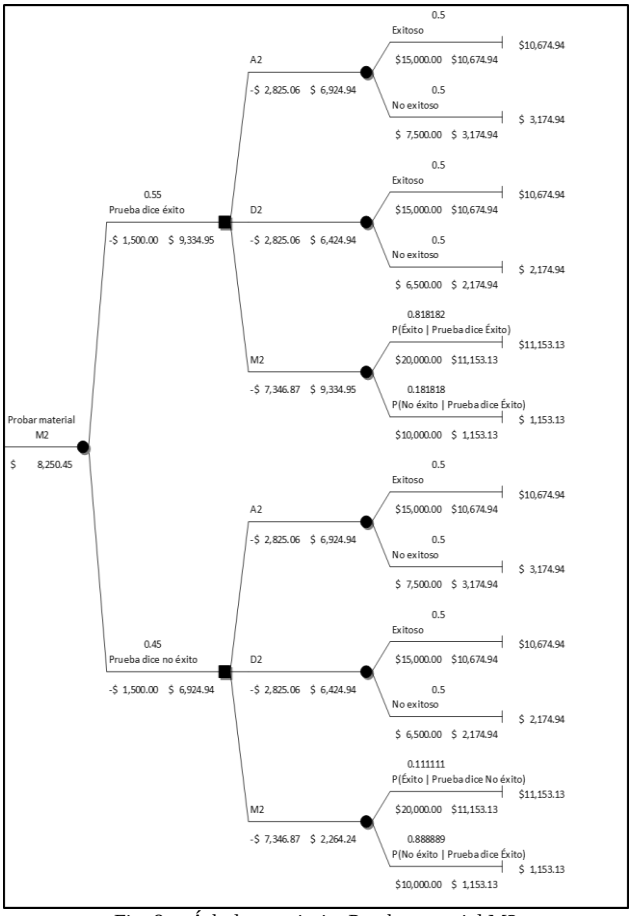


Fig. 8. Árbol posteriori – Prueba material M2

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Por último, si el material que se prueba es M2, de la Fig. 9 se observa que la ganancia esperada $8,250.45. Si la prueba del material indica que será exitoso se debe seleccionar el material M2; si la prueba indica que el material no será exitoso se seleccionará el material A2.

UTILIDAD SUBJETIVA ESPERADA

Se construye un modelo SUE (Utilidad Subjetiva Esperada) estableciendo los prospectos de alternativas que se muestran en la Tabla 3.

Considerando que la decisión arriesgada se puede entender como una apuesta entre distintas loterías [15]. Es decir, una persona racional preferirá, en primer lugar, aquella lotería que le dé el mayor premio; en segundo lugar, una persona racional será indiferente entre una lotería cuyos únicos premios sean ganar (G) o perder (P) y alguna lotería que ofrezca un premio intermedio entre G y P.

Tabla 3.CLASIFICACIÓN DE PROSPECTOS DE ALTERNATIVAS

Número	Prospecto	Clave
1	Material A2 – Exitoso	A2E
2	Material A2 - No exitoso	A2NE
3	Material D2 – Exitoso	D2E
4	Material D2 - No exitoso	D2NE
5	Material M2 – Exitoso	M2E
6	Material M2 - No exitoso	M2NE

Para transformar información con que se cuenta en este contexto de incertidumbre en una distribución a priori de probabilidades subjetivas, el decisor ha de elegir de manera consistente entre distintas alternativas presentes en una serie de problemas hipotéticos sencillos de resolver. Se generan loterías posibles como variables aleatorias descritas como un par

$$I = (x,p) \quad (1)$$

en el que el vector

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (2)$$

específica los pagos posibles, y el vector

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad (3)$$

Indica las probabilidades con que se reciben dichos pagos posibles. En las Fig. 9, 10, 11 y 12 se muestran las loterías planteadas.

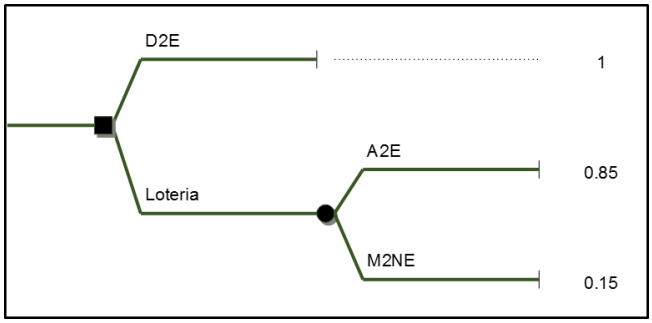


Fig. 9. Lotería de indiferencia para el prospecto D2E.

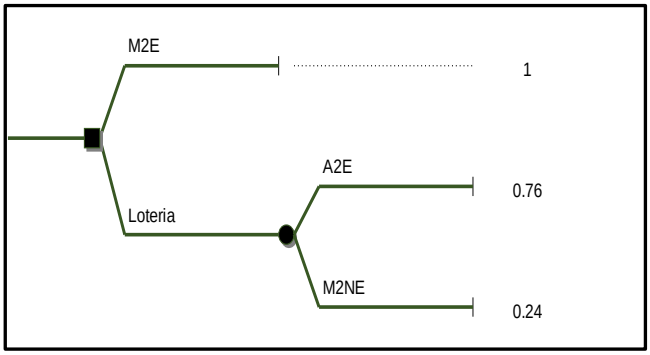


Fig. 10. Lotería de indiferencia para el prospecto M2E.

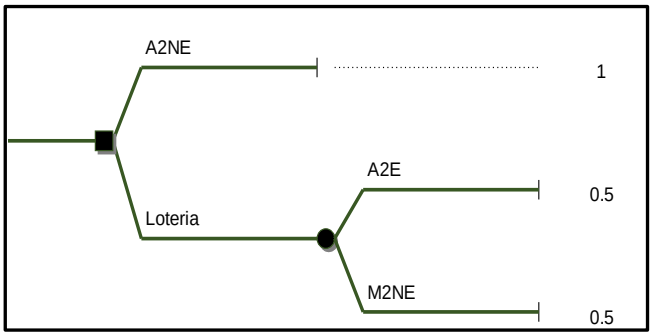


Fig. 11. Lotería de indiferencia para el prospecto A2NE.

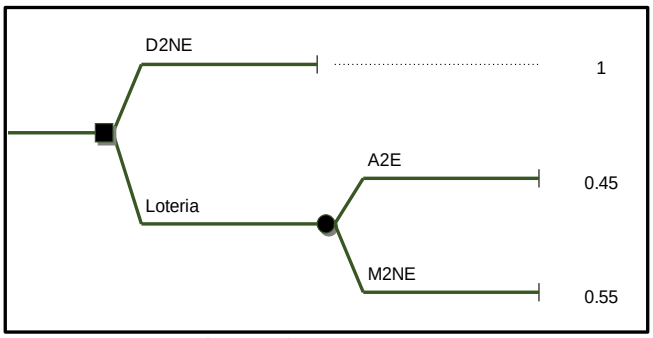


Fig. 12. Lotería de indiferencia para el prospecto D2NE.

Con los resultados de las loterías generadas se formula el árbol de la Fig. 13 en la que se puede observar que cada alternativa A2, D2, M2; cuentan únicamente con dos prospectos (Mejor, Peor) con lo que se calculan las probabilidades de preferencia de cada prospecto para cada alternativa.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

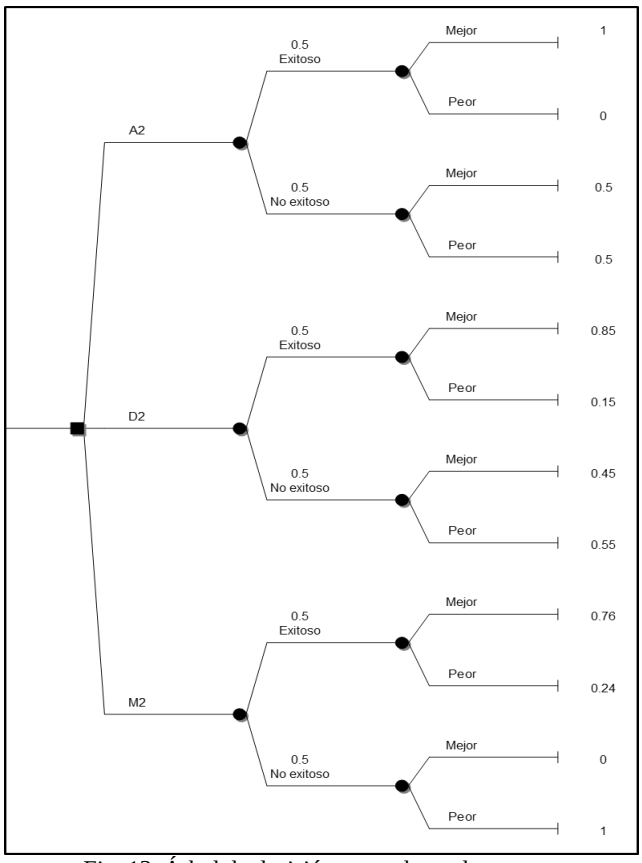


Fig. 13. Árbol de decisión con valores de certeza.

$$A2 - PEOR = (0.5 * 0) + (0.5 * 0.5) = 0.25$$
$$D2 - MEJOR = (0.5 * 0.85) + (0.5 * 0.45) = 0.65$$
$$D2 - PEOR = (0.5 * 0.15) + (0.5 * 0.55) = 0.35$$
$$MA2 - MEJOR = (0.5 * 1) + (0.5 * 0.5) = 0.75$$
$$2 - MEJOR = (0.5 * 0.76) + (0.5 * 0) = 0.38$$
$$M2 - PEOR = (0.5 * 0.24) + (0.5 * 1) = 0.62$$

En la Fig. 14 se muestra la representación de las alternativas como probabilidades del mejor prospecto.

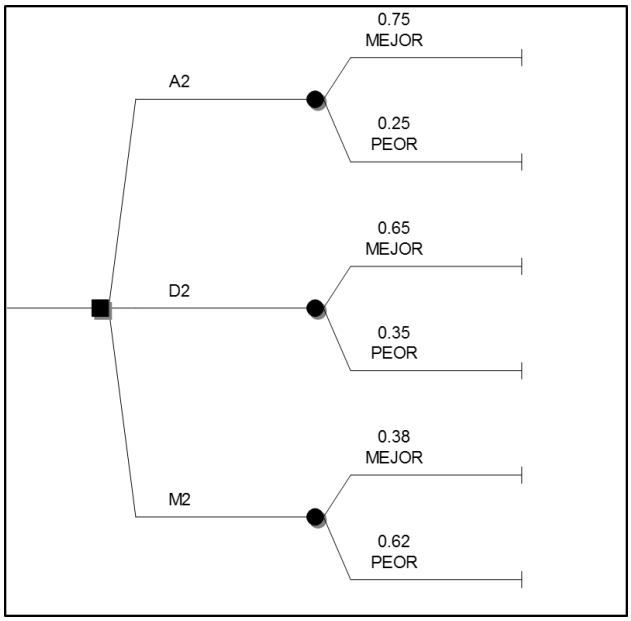


Fig. 14. Alternativas como probabilidades del mejor prospecto.

En la Fig. 14, se puede observar que las alternativas A2, D2 y M2 producen probabilidades de preferencia de 0.75, 0.65 y 0.38, respectivamente sobre el mejor resultado de cada prospecto. Considerando estas probabilidades como utilidad subjetiva esperada se construye el árbol de decisión de la Fig. 15.

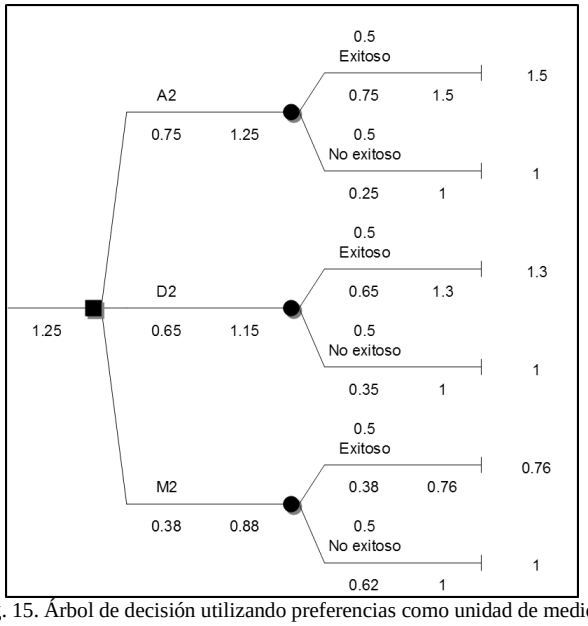


Fig. 15. Árbol de decisión utilizando preferencias como unidad de medida.

V. CONCLUSIONES

Utilizando el despliegue de la función de calidad se generan las alternativas para la selección de material para la producción de arrancadores en pirotecnia en para un taller de la localidad. Esas alternativas son A2, D2 y M2; para las cuales se dan especificaciones de funcionamiento y poder determinar si la selección de material dará un producto exitoso o no exitoso.

Con el árbol de decisión de la Fig. 8 se observa que la mejor selección de material es D2, con una ganancia esperada de $8,787.44.

Se observa que el mayor valor esperado se tiene cuando se prueba el material A2 y resulta que es exitoso, se tiene una ganancia de $9,811.31. Pero si resulta que el material no es exitoso se tendrá una ganancia de $6,924.94; que es la menor ganancia esperada, misma que se obtiene si se selecciona el material D2.

Por otro lado, si se selecciona el material D2, y resulta que no es exitoso el material la ganancia mínima esperada es $7574.94; que es la mayor de las ganancias esperadas.

Con lo que se refiere al análisis de preferencias, del árbol de la Fig.15, se puede observar que, según las preferencias del decisor, el material a seleccionar es el A2.

Con este trabajo se demuestra que es posible aplicar análisis de decisiones a la selección de alternativas que planeta el QFD.

Estas decisiones pueden ser en base a valores monetarios de cada alternativa o a preferencias del decisor.

Aun cuando los datos utilizados en el modelo presentado son el resultado de un decisor en particular, el modelo queda planteado para que pueda ser utilizado en situaciones que requieran claridad de acción en la selección de diseño de procesos o servicios; en particular para alternativas que sean planteadas por el despliegue de la función de calidad.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

REFERENCIAS

[1] Mireles-Muños, R.: *Implementación del despliegue de la función de calidad (QFD)*, 1st ed., UAEH, Ed. Hidalgo, México: (UAEH, 2007).

[2] Pastor-Sanmillán, A.: *Aplicación de las técncias despliegue de la función de calidad (QFD) y proceso analítico jerárquico (AHP) a la mejora de la calidad de la formación de posgrad:* Tecnología , Ciencia y Educación CEF, vol. 1, no. 5, pp. 11 - 36, (México, 2016).

[3] Ward, E., Miles, R-F and Winterfeldt,D.F.: *Advances in decision analysis from foundations to applications*. New York, USA: Cambridge University Press, (USA,2007).

[4] Abdolshah, M. and Moradi, M.: *Fuzzy Quality Function Deployment: An Analytical Literature Review:* Journal of Industrial Engineering, vol. 2013, pp. 1 - 11, (USA, 2013).

[5] Sina, S.S. and Bender,B.: *Model based QFD method with the integrated sensitivity Analysis,* in Conference: IEEE 11th Annual IEEE System Conference, Montreal, pp. 1 - 6. (Canada, 2017).

[6] Z. Yang, L. Yuchung and W. Minghong L. Shuofang: *Study Methods of Design Elements Based on EGM and Fuzzy QFD*: in nternational Conference on Engineering Simulation and Intelligent Control (ESAIC), pp. 83 – 86 (Changsha, 2018).

[7] H. Chen, Z. Yuan and X. Chu L. Zhang: *Product Platform Planning through Sensitivity Analysis and Improved QFD Approach*" in International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), pp. 1796 – 1800, (Bangkok, 2018).

[8] Yingqiao and Hongbin Yan. Xu, *Identifying Core Technongies Based on a Two-Stage QFD Model*, in 10th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, pp. 356 – 360, (USA,2018).

[9] L. Ma: *Determining Importance Weights for Engineering Characteristics in QFD Considering the Correlations Under Uncertainties*," in 2018 2nd IEEE Advanced Information Management,Communicates,Electronic and Automation Control Conference (IMCEC), pp. 2716 – 2721, (Xi'an, 2018).

[10] F. Tseng: *Integrating Service QFD and TRIZ for a Lucky Draw System Design: The Case Study*, in 2017 IEEE 7th International Symposium on Cloud and Service Computing (SC2), pp. 189 - 193. , (Kanazawa, 2017)

[11] W. Song, Z. Li and Y. Li. Y. Li,:*Innovative design of water boilers based on QFD and TRIZ,* in 2017 Chinese Automation Congress (CAC) , pp. 3415 - 3418. (Jinan, 2017)

[12] G. Büyüközkan and D. Uztürk.: *Combined QFD TOPSIS approach with 2-tuple linguistic information for warehouse selection* in 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), pp. 1 - 6., (Naples, 2017)

[13] V. Jain and S. A. Khan., *Reverse logistics service provider selection: A TOPSIS-QFD approach,* in 2016 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), , pp. 803 – 806, (Bali, 2016).

[14] Willmer-Escobar, J., Linfati, R., and Adarme-Jaimes, W., :*Gestión de inventarios para distribuidores de productos perecederos*, Ingeniería y desarrollo, vol. 35, no. 1, pp. 219 - 239, Enero - Junio 2017 (Colombia, 2017).

[15] Aguiar, F.: *Teoría de la decisión e incertidumbre: modelos normativos y descriptivos*, EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Socia, vol. 1, no. 8, pp. 139 - 160, 2004.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas.

Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
eik_010@hotmail.com, fajardoensm@gmail.com

Resumen- **El presente artículo propone un diccionario matemático en lengua de señas mexicana, así como el diseño, programación en implementación en Google Play Store de una aplicación móvil (APP) como apoyo para la potencialización del proceso de aprendizaje de la Geometría en escuelas secundarias inclusivas.**

Palabras Clave- **Educación inclusiva, Tecnologías de la Información y la Comunicación, enseñanza, Problemas de lenguaje-aprendizaje.**

Abstract- This work proposes a mathematical dictionary in Mexican sign language with the design, programming and implementation in Google Play Store of a mobile application (APP) as support in the Geometry learning process for inclusive elementary schools.

Keywords- Inclusive education, Information and Communication Technologies, Teaching, Language-based learning disability (LBLD).

Mathematical Subject Classification: **97C50.**

I. Introducción

Según la Encuesta Nacional Demográfica 2014 en México existen un total de 2.4 millones de mexicanos sordos de los cuales el 3.53% son niños de menos de 14 años y solo el 64% asiste a la escuela; la misma encuesta indica que cuando estos niños llegan a adultos (597,566 sordos en el estrato de 30-59 años) sólo el 66.99% estudió hasta nivel básico.

La Lengua de Señas Mexicano no cuenta con un diccionario completo acorde a los conocimientos matemáticos descritos Plan de la SEP (2011) [1] o del nuevo modelo educativo (2017) [2].

En México existen leyes, reglamentos y ordenamientos normativos con sustento internacional que regulan la educación básica; así como los documentos que promueven formas adecuadas de asistencia y apoyo a las Personas con Discapacidad para asegurar su acceso a la información y al no contar con un LSM matemático que permita alcanzar el máximo de los potenciales de los niños de secundaria incurre en los siguientes aspectos:

1. Constitución Política de los Estados Unidos mexicanos: Describiendo protección y la prohibición de cualquier discriminación por discapacidad.
2. Ley General de Educación: Refiriéndose prevenir y eliminar barreras de aprendizaje y participación en la sociedad de las personas con discapacidad.
3. Plan Nacional de Desarrollo: Que propone un México Incluyente con equidad.
4. Acuerdo 592: Que articula la educación Básica y la aplicación de los planes y programas de estudio de educación secundaria.
5. Aprendizajes Clave para la Educación Integral: Que establece un currículo inclusivo acorde con la "Estrategia Nacional de Inclusión".
6. Convención Sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad: Estableciendo facilitar el aprendizaje del LSM asegurando que la educación de sordos o sordociegos se imparta en los lenguajes, modos y medios de comunicación más apropiados que permita alcanzar su máximo desarrollo académico y social.
7. Ley General para la Inclusión de las Personas con Discapacidad: Que en su artículo 14 reconoce a la LSM como una lengua nacional y como parte del patrimonio lingüístico de México.
8. Ley para la Integración al Desarrollo de las Personas con Discapacidad del Distrito Federal: Integrando el desarrollo de estos mediante una participación.
9. Ley para Prevenir y Eliminar la Discriminación del Distrito Federal: Que describe los derechos, sanciones y formas de convivencia mediante el respeto.

El gobierno mexicano mediante la Secretaría de Educación Pública ha creado los Centros de Atención Múltiple (CAM) que atiende las necesidades de los alumnos que presentan discapacidad o trastornos y son regulados por la Educación Especial, la cual a pesar de contar con un Centro Digital de Recursos, este sólo cuenta con un Diccionario Español–Lengua de Señas Mexicana (Dielseme) de tipo estudio introductorio al léxico de la LSM y con dos diccionarios interactivos con sólo unas cuantas palabras de lenguaje matemático registradas en total.

Una de las propuestas de formalización del LSM es la publicada por el CONAPRED (2011) "Manos con Voz"[3], la cual cuenta con 240 páginas de las cuales sólo 13 son dedicadas a las matemáticas que comparte espacio con palabras "relacionadas" como "dólar"; sin embargo en estos centros no se promueve la integración e inclusión al estar separados de otros estudiantes; sin embargo se encontró que en 25 escuelas secundarias investigadas que al menos 2 contaban con al menos 1 alumno sordo, que sus profesores no se encuentran capacitados para atender a estos en LSM; se comunican por lenguaje escrito y les brindan menos contenidos.

En el 100% de los casos de docentes que atienden alumnos sordos secundarios y telesecundarias, así como autoridades de educación especial entrevistados aseguran que la SEP no

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

cuenta con un diccionario en LSM matemático establecido que contenga las palabras utilizadas en los planes y programas 2011 y del nuevo modelo educativo en nivel secundaria y aseguran que tampoco de primaria.

EL PROBLEMA DEL LENGUAJE

El proceso de enseñanza-aprendizaje con sus actores docente-discente es análogo al proceso de comunicación emisor-receptor en su primer estado -independientemente de los procesos de examinación y entrenamiento que se quieran considerar posteriores a esta fase inicial- por lo que una comunicación efectiva permitirá un "procesamiento correcto de información" de acuerdo con la teoría de la información de Shanon y Weaver en "*A Mathematical Theory of Communication*"[4] donde se establece los principios de que la información es independiente del contenido, se centra en la transmisión y su cantidad que se mide como el incremento de la eficacia –aprendizaje como retención correcta del mensaje transmitido para su procesamiento- en la transmisión de la información entre la emisión y la recepción de los mensajes –para simplificar la lengua de señas la dactilología no es viable y los ideogramas son el curso de acción óptimo respecto a los tiempos y movimientos kinestésicos utilizados por palabra- y su capacidad de canales de comunicación y codificación eficaz de los mensajes; por lo que para evitar una ambigüedad simbólica entre emisor-receptor se requiere un lenguaje libre de contexto, único y que permita la formalización del lenguaje matemático para lograr una comunicación efectiva.

El proceso de una lengua puede ser modelado mediante el "Sistema de procesamiento de información" de Newell y Simon [5] contiene los módulos de sistema sensorial –la vista que captura los movimientos kinestésicos denominados señas-, un conjunto de elementos denominados símbolos –LSM-, una "estructura simbólica" formada por un conjunto de símbolos conectados por un conjunto de relaciones –semántica del ideograma-, su conocimiento –memoria de estructuras simbólicas del ideograma- y un sistema de procesamiento.

Por otro lado, Lachman y Butterfield [6] consideran al procesamiento de información como operaciones simbólicas –por lo que los movimientos kinestésicos en el lenguaje de señas tienen un significado ideográmico con información- que cuenta con las características de codificación, comparación, localización y almacenamiento que forman un conocimiento.

Lo anterior requiere una precisión kinestésica de las señas utilizadas, un significado único –al no existir otra seña igual- y un establecimiento en la población a comunicarse -mexicana- mediante un diccionario finito que permita lograr una efectividad para que el significado produzca la reacción del receptor en el contexto matemático.; sistémicamente el circuito de efectividad comunicativa deberá contener entonces una fuente emisora de señas inicial, un transmisor kinestésico de señas ideográmicas –las manos- en el espacio, un canal visual, un receptor con la capacidad decodificación semántica del mensaje transmitido utilizando un diccionario de símbolos –previamente aprendidos y exclusivos para ideas matemáticas- y un receptor del mensaje –alumno-; cabe mencionar que existe en medio de todo esto el ruido que rodea al emisor o receptor el cual puede alterar el mensaje durante su transmisión; el principal causante de esto es la falta de un lenguaje de señas formalizado matemático ya que ambos pueden tener diferente lengua.

El problema descrito tiene un principio de contexto social ya que existen más de 30 variantes de lenguas de señas, sólo en la república mexicana; por lo que se requiere el establecimiento de una LSM matemático –sin excluir otras lenguas de señas- para lograr una efectividad comunicativa y cognitiva como se ha logrado con protocolos de comunicación como la IEEE o el reconocimiento de patrones kinestésicos de sensores como el Microsoft Kinect.

Bajo el contexto anterior se requiere urgentemente que la SEP diseñe, implante y establezca una LSM matemático mexicano que permita una comunicación formal matemática y la trascendencia de conocimientos superiores; de lo contario se continuará incurriendo en una discriminación cognitiva que establece una barrera cognitiva y de un rezago académico en los estudiantes sordos al estar excluidos de una comunicación simbólico-matemática formal.

II. EL DICCIONARIO MATEMÁTICO EN LSM

Luria[7] se refiere al desarrollo lingüístico como el proceso por cual el sujeto se va apropiando de un repertorio amplio y complejo del lenguaje permitiendo a la información ordenarla, sintetizarla, relacionarla, categorizarla y hacer deducciones sobre la información recibida para poder establecer conclusiones.

El niño sordo al igual que el oyente va adquiriendo palabras mediante crece y con el pasar del tiempo las va articulando hasta formar frases que le permiten lograr un relato; por lo que el lenguaje regula progresivamente la transición del conocimiento concreto al abstracto como sucede con las matemáticas.

Para Vygosky[8] el lenguaje es un instrumento psicológico de la naturaleza que estudia los diferentes sistemas de signos que se poseen los humanos que transforma las aptitudes y habilidades de estos en funciones superiores, donde el significado de la palabra es una generalización de la comunicación y del pensamiento; de la misma forma para los sordos las señas son una generalización de conceptos, abstracciones o significados siendo de carácter social al formarse de acuerdo a las demandas de la comunicación en las que se presente el sujeto, la intervención y el empleo de signos que deba realizar para poder dar soluciones a los problemas que la evolución y el contexto guíe.

Por ello la importancia de proveer de estas nuevas señas a los alumnos que presentan alguna discapacidad auditiva que requieren conocimientos matemáticos de calidad demandados a su edad y requeridos para proseguir sus estudios mediante auxiliares como la APP y el diccionario matemático en Lengua de Señas Mexicana.

Los diccionarios nos proporcionan los significados de las palabras y en ocasiones cuentan con información adicional como su etimología, escritura, sinónimos y antónimos; por lo tanto, son un apoyo cognitivo que promueve el uso correcto del lenguaje.

Por otro lado, se debe tomar en cuenta que estos definen palabras de un idioma y este siempre está en constante evolución, por lo que estos permiten añadir palabras y su modificación en términos o definiciones; por lo que como docentes debemos preguntar si aprendemos de los diccionarios o nosotros somos quienes les enseñamos a ellos como deben definir nuestras palabras.

Se diseñó un diccionario de tipo híbrido (académico, especializado y visual) estableciendo con 150 señas de

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

geometría utilizadas en secundaria de las que carece la LSM al revisar libros aprobados por la SEP [1] [2].

En la figura 1 se describe la seña de radio creada para la LSM de esta propuesta, la cual es una seña bimanual (SB) ya que se articula con dos manos a la vez de manera simétrica y dispar; en estas tenemos una mano que será la dominante y la mano no dominante, considerándose también una seña icónica al copiar la peculiaridad del objeto del radio matemático y también estar compuesta de una seña inicializada o alfabética al aparecer la dactilología de la letra "r", que es la letra en español con la que comienza la palabra matemática "Radio". este elemento que con mayor frecuencia es cambiado por uno nuevo.

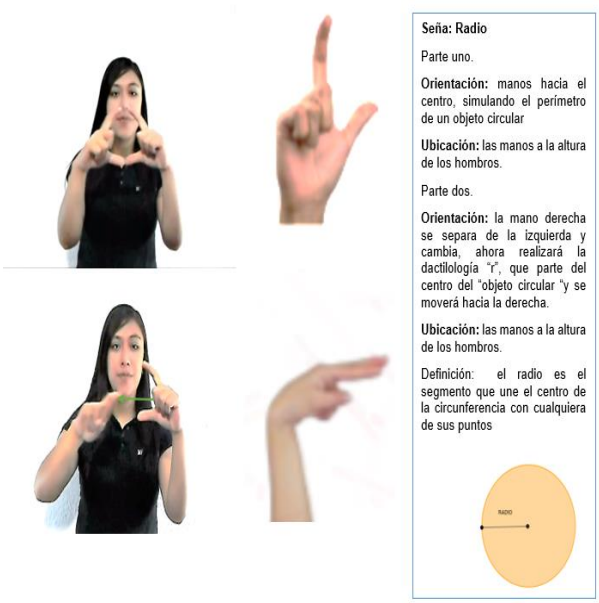


Fig. 1: Seña de la palabra matemática "Radio" en la APP.

III. APP

Se programó una APP en el lenguaje Xamarin acorde al diccionario de la propuesta la cual puede ser descargada en la Google Play Store con el nombre de "INCLUYEME Lengua de Señas Mexicana Matemáticas" por parte del Cuerpo Académico PRODEP ENSMEX-CA-2 la cual permite seleccionar 150 señas de geometría y en su descripción se presenta como una propuesta inclusiva de extensión matemática para la Lengua de Señas Mexicana y se encuentra categorizada en APP para educación.

La APP cuenta con una GUI con un menú slider intuitivo, como se describe en la figura 2; ya que en la parte lateral izquierda aparecen las palabras pudiéndose desplazar mediante la pantalla táctil hacia arriba y abajo por las 150 palabras y al tocar una de ellas, este reproduce el video correspondiente contando con un menú ocultable en la parte inferior de este para controlar el retroceso, avance o pausa; permitiendo al usuario observar indeterminadamente los videos para imitar las señas.

La APP también provee de la definición matemática y se adapta a diversos dispositivos móviles y posiciones mediante la lectura del sensor de orientación en tiempo real.

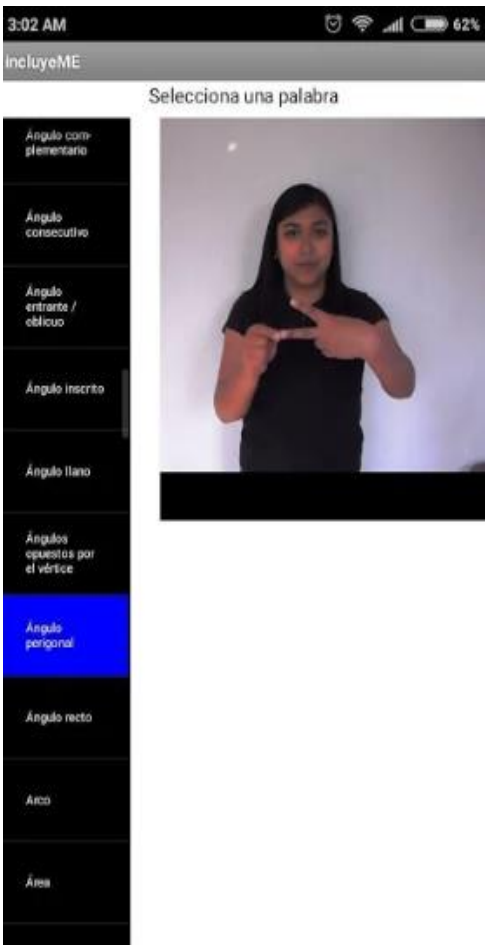


Fig. 2: GUI de la APP. Fuente: Google Play Store.

IV. EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS.

Se actualizó la APP a las necesidades de lenguaje matemático de geometría que utilizarían los profesores de secundaria que trabajan con alumnos sordos en sus grupos para poder realizar las pruebas de campo.

Se seleccionó un universo de prueba para experimentar el proceso de alfabetización y comunicación efectiva de LSM mediante la EST No. 6 Sor Juana Inés de la Cruz, la cual cuenta con un salón especial con 15 alumnos sordos gestionado por el CAM de la Dirección General de Educación Especial y 35 alumnos oyentes que conviven con estos en receso para promover la inclusión de un grupo con otro.

Se desarrolló un ejercicio aplicado a ambas poblaciones y al solicitar comunicar los resultados entre ambas se observó que estas pudieron comunicarse efectivamente intercambiando al 100% los resultados de un ejercicio obteniendo una comprensión bidireccional al utilizar un lenguaje establecido, común y la APP como interfaz de aprendizaje.

En las entrevistas se obtuvo que ambas poblaciones consideran importante un diccionario para poder comprender o comunicar matemáticas; respecto a los alumnos en esta población se obtuvo un índice Likert del 95% respecto a la app y en el 100% aceptó la propuesta de las señas matemáticas.

El segundo universo de trabajo fue la telesecundaria 71 con un grupo de 20 alumnos, de los cuales 3 son sordos; se apoyó con el diseño de una planeación didáctica para la formalización del uso de las propiedades de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas mediante materiales concretos y semiconcretos, obteniéndose

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

que la APP permitió la comunicación efectiva al 100% entre alumnos oyentes y sordos en un trabajo colaborativo utilizando los principios de las situaciones[9].

V. Conclusiones

En las entrevistas se obtuvo que ambos tipos de alumnos consideran importante un diccionario para poder comprender o comunicar matemáticas; respecto a los alumnos en esta población se obtuvo un índice Likert del 100% respecto a la app y en el 100% aceptó la propuesta de las señas matemáticas. En entrevista con el profesor, este consideró a la APP como "una herramienta excelente y necesaria para poder enseñar el contenido con este tipo de alumnos" solicitando que esta debe incluir a estos alumnos, contenidos y otras materias entre otras observaciones de expansión de esta. El Departamento de Investigación y Experimentación Educativa de la Escuela Normal Superior de México intentó formalizar el trabajo del diccionario y APP mediante la colaboración con la Dirección General de Educación Especial electrónicamente desde 2017; hasta el momento no se ha podido obtener una respuesta de autorización para práctica por escrito por parte de las autoridades de la DGES; sin embargo la experimentación informal arrojó resultados positivos en espera que las autoridades encargadas cumplan con su función [10] y que este trabajo sirva de marco referencial para desarrollar y formalizar el diccionario LSM matemático mediante su propuesta oficial en la SEP para poder cumplir con las leyes mencionadas [12] en este documento y lograr una verdadera educación inclusiva.

Actualmente la apliciaición tiene más de 1000 descargas activas en uso desde su salida en la Google Play Store en enero de 2018 y más de 200 resultados de búsqueda en google de páginas que apuntan a la APP en el 2020.

La tesis "*Diseño en lsm de un diccionario matemático y app para la enseñanza de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en 3° grado de secundaria*" de la actualmente Lic. Eicka Viana Huihuitoa fue ganadora del 6to Concurso De Tesis Sobre Temas Vinculados Al Fenómeno Discriminatorio En La Ciudad De México COPRED [12].

Referencias

[1] Secretaría de Educación Pública: *Plan de estudios 2011*: SEP (México, 2012)

[2] Secretaría de Educación Pública: *Plan de estudios 2017*: SEP (México, 2017)

[3] Serafín-Fleischmann, M. E., González-Pérez, R.: *Manos con voz : diccionario de lengua de señas mexicana*. CONAPRED. (México,2011)

[4] Shannon, C. E. & Weaver, W.: *A Mathematical Theory of Communication.* (USA, 1949).

[5] Newell, a., y Simon, H.: *A. human problem solving*. Prentice-hall, englewood cliffs, p. 20, (USA.,1972).

[6] Lachman, R.; Lachman, J., y Butterfield, E. C.: *Cognitive Psychology and Jnformation Processing*, LEA, Hillsdale. (USA,1979)

[7] Luria, A., R.: *Sensacion y percepción*, M.R. Editor (España, 1994).

[8] Vygotski, L. S.: *instrumento y símbolo en el desarrollo del niño*, Desarrollo de los procesos superiores: Grijalbo. (España, 1979)

[9] Brousseau, G: *Théorie des Situations Didactiques. La Pensée Sauyage. Grenoble*, (Francia,1998).

[10] Diario Oficial de la Federación Ley General para la Inclusión de las personas con discapacidad. México (México, 2011)..

[11] http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/serviciosdf.aspx(Recuperado 3 de noviembre de 2017 3:40 hrs)

[12] https://copred.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/5ab/d11/984/5abd1198408cb449490320.pdf (Recuperado el 10 enero de 2020 11:50 hrs)

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

El uso de las funciones en el fortalecimiento de las operaciones básicas en alumnos de secundaria.

Efrain Valencia Calzadilla
Asesor Técnico Pedagógico Secretaria de Educación Pública de México, B.J., 02420 CDMX, México.
deskraton@gmail.com

***Resumen*- En el presente trabajo se aborda la dificultad que tienen los estudiantes de educación secundaria en el uso de las operaciones básicas y cómo mediante el uso de las funciones de primer grado se pueden llegar a obtener mejores resultados al realizar adicciones, productos y sus inversos, utilizando números con signo y también mejorar las competencias de resolver problemas de manera autónoma, validar procedimientos y resultados, mediante las funciones en sus tres presentaciones que son algebraica, tabular y gráfica, apoyando así el fortalecimiento de las habilidades lógico matemáticas de los estudiantes de educación secundaria.**

***Palabras Clave*- funciones, operaciones básicas, números con signo, validar resultados, resolver problemas de forma autónoma.**

Abstract- This paper describes the difficulty in Mexican elementary school students have using basic operations and the use of first-grade functions, better results can be obtained by making addictions, products and their inverses, using signed numbers and also improve the skills of solving problems autonomously, validating procedures and results, through the functions in its three presentations that are algebraic, tabular and graphical, thus supporting the development of logical mathematical skills of the students.

Keywords- functions, basic operations, signed numbers, validate results, autonomously to solve problems.

***Mathematical Subject Classification:* 00A35**

I. Introducción

En la actualidad un amplio problema que se tiene con el uso de la tecnología es el mal manejo de la misma; debido a ello muchas personas han perdido habilidad para realizar ciertas actividades y acciones, ya que no es necesario hacerlas de forma manual o personalmente debido a que hay una máquina o algún aparato que puede cumplir con estas actividades; tal es el caso de la realización de operaciones básicas por el mal uso de las calculadoras que ha logrado un amplio retroceso en la realización de las operaciones básicas, ya que al teclear los resultados en una calculadora o en cualquier teléfono celular los alumnos pueden tener los resultados de una forma simple y rápida, logrando que en muchas ocasionas se tenga el desconocimiento de porqué se obtuvo cierto resultado o si el resultado es correcto, pues se corre el riesgo que al ser introducidos los valores se equivoque el usuario al anotar correctamente los comandos con los que se realizan las operaciones lo que logra que se pueda optimizar la obtención de resultados pero eso no garantiza que los resultados sean correctos ya que recordemos que no todas las operaciones básicas poseen la propiedad conmutativa, lo que nos conduce a que no basta con el simple hecho de teclear números y símbolos para obtener respuestas, si no primero saber de dónde vienen para poder demostrar el resultado; esta cuestión ha logrado impactar en gran medida a los alumnos de educación secundaria ya que no se preocupan en comprobar que los valores que colocan como ciertos lo sean, pues pocas veces dan una explicación de porqué se obtienen dichos valores o que los impulsó a realizar esas operaciones, esto impacta directamente no sólo en el incumplimiento del aprendizaje esperado para educación secundaria de la SEP "Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos"[1]; si no que obstaculiza el aprendizaje de otros contenidos al tener débil los principios base para la resolución de problemas que impliquen el uso del razonamiento matemático, por lo que es importante buscar soluciones a esta carencia en los estudiantes de educación secundaria en México.

El querer solucionar o buscar alternativas a esta problemática se basa en la importancia de poder validar procedimientos y resultados ya que en muchas ocasiones el estudiante puede usar un técnica para resolver un problema de una forma muy eficiente, pero si sus resultados son erróneos no se logra el propósito de resolver el problema, una cuestión muy común no sólo en secundaria si no en todos los niveles educativos, si el alumno no sabe resolver una operación básica de una forma eficiente y eficaz no podrá dar la respuesta correcta a un problema que requiera un conjunto de operaciones básicas conjuntas ya que el resultado estará incorrecto; esta habilidad se puede fortalecer cuando se realizan actividades o ejercicios que impliquen su uso, por ello para poder practicarlo de una forma constante y discreta en la que se puedan abordar diferentes temáticas útiles para el alumno es que propongo el uso de funciones para fortalecer las habilidades del pensamiento matemático y las operaciones básicas.

II. La importancia de las funciones dentro del ámbito escolar

En muchos aspectos de la vida cotidiana dependemos de ciertas circunstancias para poder realizar otras; por ejemplo para recorrer una determinada distancia, necesitamos tal tiempo, para poder comprar determinado producto cierto dinero esto nos conduce a que "cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda; entonces se dice que la primera es función de la segunda"[2] motivo por el que

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

podemos dar un acercamiento a la vida real con funciones continuas con un exponente 1 a los alumnos de educación secundaria para que tengan presente una practicidad en las ejercicios que se proponen en clase, se pueda dar una argumentación de la misma y sobre todo se pueda explicar y fortalecer temas fundamentales como lo son las operaciones básicas, regla de los signos, realización de gráficas, interpretación de gráficas entre otros temas, con el uso de funciones de primer grado, siempre tomando en cuenta los tipos de números con los que se quiera trabajar al dar un intervalo de variable y explicando por qué el caso de la división por cero se encuentra excluido, con esto podremos entonces dar un amplio panorama a los alumnos no sólo de lo que es una variable; sino también a la práctica de operaciones básicas con diferentes tipos de números, incluso mezclarlos y de esa forma fortalecer la resolución de problemas, procedimientos y la validación de resultados.

Es también una temática que nos permite abordar no sólo una visión algebraica de un problema determinado, puesto que muchos alumnos al ver únicamente números sienten rechazo a ello; sino también una representación tabular que ayuda a los estudiantes a ordenar las ideas y notar el procedimiento que se realiza al observar los valores del dominio y del codominio, así como el desarrollo aritmético presente, lo que hace que vaya analizando y realizando las operaciones básicas necesarias para encontrar los valores y en caso que se realicen las operaciones con calculadora saber de dónde provienen los resultados, el proceder de los números como la relación y el cambio que están presentando los valores, cuestión que se puede visualizar mejor a la hora de realizar una gráfica, ya que esta puede representar nuestra realidad mediante sus 3 ejes coordenados rectangulares, que forman 8 octantes y los 3 planos XY, XZ y YZ, que nos dan un espacio vectorial para representar distintos fenómenos[3] que en educación secundaria por ser un nivel inicial únicamente se manejan los cuadrantes creados por el plano XY, que nos permiten representan fenómenos de nuestro entorno en 2 dimensiones facilitándonos visualmente lo que se realiza en forma algebraica y tabular, dando al aprendiz un panorama más amplio que puede facilitar su aprendizaje en el tema de funciones y su práctica con operaciones algebraicas.

III. Abordando el tema

En muchas ocasiones es frustrante tratar de enseñar algún tema y que los alumnos no logren aprender, pero en ocasiones esto no quiere decir que no están prendiendo ya que hay que analizar de donde proviene la equivocación, esto mediante un dialogo matemático en el que el estudiante expone sus argumentos para validar un resultado y el profesor analiza lo mencionado tratando de encontrar el fallo, en la metodología utilizada para resolver el problema, de esta forma se puede notar que en muchas ocasiones, de hecho la mayoría, los errores provienen de un poco dominio y manejo de operaciones básicas, de que las llamadas tablas de multiplicar no están bien aprendidas, de que el poco uso de la adición y producto así como sus inversos han causado esta carencia de habilidad a la hora de operar para tratar de encontrar soluciones, esto ha llevado a buscar diferentes soluciones el ejemplo más amplio es el cálculo mental, una técnica muy buena que ayuda a fortalecer las habilidades de alumno, pero requiere tiempo significativo de una clase que tan solo dura 50 minutos que no siempre son suficientes para lograr el proceso de enseñanza y aprendizaje eficientemente, por lo que pensando en ello, se propone el uso de las funciones ya que estas al realizar las tablas de alguna función puede verse el desarrollo aritmético de la función y con ello brindar un soporte que obliga indirectamente al uso de operaciones básicas y que al graficarse puede evidenciar algún error en los resultados y llevar al auto diálogo cuando la gráfica no es una línea recta ya que demuestra el fallo de un valor y es necesario validar el resultado lo que lleva a resolver los problemas de una forma autónoma.

Es complicado lograr que los alumnos alcancen este nivel de comprensión pero es un tema que ayuda mucho al repaso de operaciones básicas ya que en una sola función de primer grado con números enteros positivos y negativos que vayan de -5 a +5 con su tabla, se realizan 11 multiplicaciones y 11 adiciones o sustracciones, que a su vez cae en el manejo de números con signo y se regla de los signos lo que conlleva a un amplio repaso en un solo problema que cuando es graficado se puede validar si los valores son ciertos ya que si la gráfica no es una recta y el trazo es correcto demuestra un error que indica con qué número se cometió y esto a demostrar si efectivamente hubo un error o no logrando así que el estudiante pueda resolver un problema de forma autónoma y desarrollando competencias que son necesarias para la vida.

Es curioso ver cómo los alumnos se complican muchas veces el orden para realizar las operaciones y que el cambio de valor de la incógnita los aflige debido a que este tema es de primer grado y ellos recién comienzan a utilizar variables, por lo que es un tema sencillo introductorio hacia el uso de las variables y de repaso para operaciones básicas, regla de los signos y operaciones de números con signo, en muchas ocasiones es un tema que no se quiere ver pues muchos docentes consideran las gráficas como algo tedioso y constante, pero la variabilidad en la forma de representarse es lo que logra que los alumnos puedan afirmar muchos temas y fortalecer sus habilidades matemáticas de una forma discreta y fácil, usando de esta forma una variable a la repetición de las llamadas tablas de multiplicar, pero usándolas en un problema de índole matemático y mezclando con otras operaciones, dependiendo del tipo de alumnos se puede usar o no funciones de segundo grado; pero sin ellas es posible lograr avances en operaciones básicas en números con signos y la presentación tabular facilita el orden de las ideas, el uso de diferentes operaciones y permite visualizar al estudiante de una forma clara los posibles errores que pueda llegar a cometer

IV. Conclusiones

Como docente siempre se busca tratar de encontrar los mejores métodos y técnicas para enseñar para lograr se lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje; no siempre es fácil debido a las distintas situaciones que abordan nuestros estudiantes, pero es un hecho que mientras el alumno no logre realizar operaciones básicas de una forma eficiente y eficaz tendrá problemas con todo el contenido matemático por lo que es una prioridad abordar esta dificultad, utilizando las funciones con mis alumnos, lograba que encontraran un orden a lo que realizaban, pero principalmente que ellos solos se dieran cuenta de sus errores cuestión que los hacia recapacitar y mediante ese feedback podían encontrar la solución a los problemas de manera autónoma, si bien es cierto que esto no va a erradicar los errores en todas las operaciones básicas que realicen los educando, va a permitir que volvamos a hacer algo

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

que se está perdiendo con las teorías del construccionismo que es la repetición y la práctica que es fundamental cuando se está aprendiendo matemáticas, porque sin las bases del conocimiento de las operaciones básicas difícilmente se logrará un progreso ya que se puede emplear bien una técnica o procedimiento pero si está mal ejecutado el cálculo el resultado estará mal, por ello puedo decir que el uso de las funciones permiten el repaso y la práctica simple y discreta de operaciones básicas con números que tengan signo, permitiendo que al cambiar en diferentes presentaciones de la función el alumno pueda entonces validar si sus resultados son correctos para poder progresar en su aprendizaje dentro de la asignatura de matemáticas en la educación secundaria.

REFERENCIAS

[1] Secretaría de Educación Pública: Plan de estudios 2017: SEP (México, 2017).

[2] Granville, W. A,.: *Calculo Diferencial e integral editorial*: Unión tipográfica editorial Hispano- Americana pag. 12 año (México, 1955).

[3] Lira, S.: *Didáctica vectorial*, editorial, Instituto Politécnico Nacional (México, 1995).

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Diseño y validación de instrumentos para la medición de conocimientos matemáticos en secundarias: experiencias y propuestas didácticas exitosas de practicantes normalistas en matemáticas

Isabel Viridiana Mendoza Nava[1], Lilly Yael Vargas Melesio[1], Mariana Rodriguez Barrios[1], Monica Marisol Hernandez Garcia[1], Alejandra García Aguilar[1], Barbara Sarahi Vega Corona[1] y Marcos Fajardo Rendón[1] (coord.).
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

***Resumen*- El presente artículo describe las experiencias de 6 practicantes de 8º semestre de la ENSM especialidad en Matemáticas generación 2016-2020 en distintas escuelas secundarias de la CDMX al implementar sus secuencias didácticas; así como el diseño, validación y aplicación de instrumentos para medir los conocimientos matemáticos de sus estudiantes.**

***Palabras Clave*- Alpha de Cronbach, instrumento, medición de conocimientos, secuencia didáctica, escuelas normales.**

Abstract-The paper describes the experiences of 6 practitioners teachers of the 8th semester of ENSM specificity in Mathematics of the 2016-2020 generation in different elementary schools of CDMX where they implementing their didactic sequences; as well as the design, validation and application of instruments to measure the mathematical knowledge of its students.

Keywords- Cronbach's Alpha, instrument, measurement of knowledge, didactic sequence, normales schools.
***Mathematical Subject Classification:* 97D60**

I. Introducción

La Escuela Normal Superior de México, en la especialidad de Matemáticas del plan de estudios 1999 establece que sus estudiantes durante el último año de estudios (7º y 8º semestre) deberán practicar en una escuela secundaria de la Ciudad de México durante todo un ciclo escolar; realizando prácticas con intervalos de asesoría dentro de la ENSM.

A continuación se presentan 6 propuestas didácticas innovadoras en distintas escuelas secundarias de la CDMX las cuales consistieron en buscar instrumentos qué permitieran diagnosticar los distintos estilos de aprendizaje de los niños y gustos para desarrollar una secuencia qué fuera del interés y del estilo de los grupos de trabajo, para posteriormente diseñar instrumentos que pudieran medir los conocimientos previos y posteriores de un contenido de acuerdo al plan de estudios utilizado por la secundaria en matemáticas de acuerdo a SEP (2011) [1].

La metodología consiste en el diseño de ambos instrumentos correlacionados de acuerdo con el contenido didáctico establecido por la Secretaría de Educación Pública, el cual deberá ser probado y obtener un Alpha de Cronbach alto de al menos 0.70 de acuerdo con Celina H. y Campo A. (2005) [2].

Para poder ser aplicado en la escuela de práctica midiendo la diferencia entre ambos permitiendo así encontrar el incremento de conocimientos adquiridos al aplicar una secuencia didáctica de cada tema propuesto.

La presente investigación con sus respectivas propuestas e instrumentos propone que puedan ser utilizada por docentes en trabajo para poder medir los avances cognitivos de estudiantes de secundaria de acuerdo con el plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública al contar con una validez Alpha de Cronbach de acuerdo con:

$$\alpha \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum V_i}{V_t}\right)$$

Dónde:
k= El número de ítems
V_i= Sumatoria de Varianzas de los Ítems
V_t= Varianza de la suma de los Ítems
α = Coeficiente de Alfa de Cronbach

Debido a que como lo explica Ramírez (1968) “El mejor modo de enseñar será aquel que más se aproxime y ajuste al modo de cómo se trabaja la mente de los alumnos que tienen interés o necesidad de aprender algo” (p.80) [3].

II. Propuesta didáctica para resolución de ecuaciones por propiedades mediante algoritmización con diagramas de flujo en grupos de 3ero

La Escuela Secundaria General No. 207 “Estado de Israel”, con Clave de Centro de Trabajo 09DES0207Z se encuentra ubicada en la calle Hacienda Clavería S/N en la colonia Prados del Rosario con Código Postal 02410 en la Delegación Azcapotzalco.

La institución cuenta con un espacio muy amplio, tanto de manera particular (aula por aula) como de manera general; las aulas están destinadas por materia.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Las prácticas docentes se desarrollaron en tercer grado, en el grupo B y C con una población estudiantil de 30 a 35, entre las edades de 14 a 15 de años.

El grupo está constituido por 31 alumnos de los cuales 17 son hombres y 14 son mujeres.

Para poder lograr un aprendizaje significativo en los alumnos, se realizó un test VAK [4] con la escala de Likert obtenido de Metts Ralph (1999). Los resultados obtenidos se muestran que el estilo que predomina en el grupo es kinestésico con 39% y visual 39%.

Al implementar una estrategia se presenta el primer obstáculo que es saber la actitud que tienen los alumnos hacia la asignatura, por esto mismo se llevó a cabo un test de actitudes hacia el estudio de las matemáticas (Fernández, 1982) [5]; lo único que se comprueba es que, pese a que éstas no les gustan, tienen una gran capacidad para resolver problemas matemáticos.

Para un mejor entendimiento de esto en la tabla 1 se pueden apreciar los puntajes de los alumnos y el nivel de actitud de éstos hacia el estudio de las matemáticas.

Al analizar los datos se puede apreciar que al menos 18 personas tienen una actitud suficiente para el estudio de las matemáticas, se tienen a dos alumnos que tienen una actitud muy insuficiente ya que no contestaron el test, pero durante el proceso enseñanza – aprendizaje se puede observar que tienen una actitud de insuficiente a regular.

El grupo está constituido por 31 alumnos, de los cuales 15 son hombres y 16 son mujeres, el ambiente se denota cálido, libre para que se pueda llevar a cabo el proceso enseñanza – aprendizaje.

Para poder lograr un aprendizaje significativo en los alumnos, se realizó un test VAK con la escala de Likert obtenido de Metts Ralph (1999) [4] y esto a su vez nos ayudará a conocer el estilo de aprendizaje que predomina en el grupo. Los resultados obtenidos se muestran que el estilo que predomina en el grupo es el visual con 52% y kinestésico con 29%.

Con base en los resultados obtenidos se desarrolló la secuencia didáctica, en la realización de material tanto visual como kinestésico y explicaciones adecuadas para poder incluir a todos en las actividades, vinculando tanto la parte matemática como lo cotidiano; para lograr esto se aplicó un test de actitudes hacia las matemáticas, los resultados se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Test Actitudes Hacia El Estudio De Las Matemáticas

Puntaje	Actitud	3º B	3º C
10% - 20%	Muy insuficiente	0	2
30% - 40%	Insuficiente	1	1
50% - 60%	Regular	7	9
70% - 80%	Suficiente	19	18
90% - 100%	Muy suficiente	3	1

Al analizar los datos queda muy claro que se debe de fomentar una actitud más positiva o adecuada para el estudio de las matemáticas, el grupo es muy efectivo para resolver acertijos matemáticos, tienen una gran capacidad para resolver problemas y siempre se mantiene un clima adecuado para la enseñanza – aprendizaje y a su vez se van fortaleciendo los lazos de compañerismo.

Los contenidos que se aplicaron en la secuencia didáctica están ubicados en los planes y programas de estudio de la SEP (2011) [1] de matemáticas, tercer grado de secundaria, dentro del eje Sentido numérico y Pensamiento algebraico.

Se diseñó una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones por propiedades mediante la algoritmización con diagramas de flujo, cuya finalidad es que los alumnos sean capaces de justificar el procedimiento de la resolución de ecuaciones por propiedades utilizando como herramienta de apoyo los DFD (diagramas de flujo de datos).

La siguiente planeación didáctica consta de 5 sesiones, en las cuales se propone el uso de los diagramas de flujo como herramienta de apoyo para la resolución de ecuaciones por propiedades descritas en la Tabla 2.

Tabla 2. Test Actitudes Hacia El Estudio De Las Matemáticas

CONTENIDO TEMÁTICO	DESGLOSE DE CONTENIDOS	APRENDI-ZAJES ESPERADOS	FECHA
Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando métodos personales u operaciones inversas. Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	Explicitación de las propiedades de los números $\mathbb{R}$ y de las ecuaciones, para su resolución adecuada.	Conoce y analiza las propiedades de una ecuación.	6/febrero
	Reconocimiento de las características de una ecuación lineal de la forma: $ax + b = c, ax = b$ y $ax + b = cx + d$.	Identifica las diferentes formas de representar una ecuación lineal.	10/febrero
	Reconocimiento de las características de una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$.	Identifica los elementos que posee una ecuación cuadrática.	11/febrero
	Resolución de ecuaciones y vinculación con la construcción de diagramas de flujo.	Emplea como herramienta de apoyo los diagramas de flujo para la resolución de ecuaciones.	13/febrero
	Resolución de ecuaciones y justifica su resolución por medio de las propiedades: ○ Asociativa ○ Inverso ○ Conmutativa ○ Cancelativa	Adquiere y fortalece el lenguaje matemático al justificar la solución de una ecuación.	17/febrero

El diagnóstico consta de 6 preguntas de opción múltiple lo cual facilita que el alumno pruebe distintas soluciones cuando se pide el resultado de una ecuación o el de desarrollar el binomio, en otras preguntas se pretenden mostrar los conocimientos previos que se tiene de álgebra.

El diagnóstico consta de alto nivel de confiabilidad (Alpha de Cronbach), el cual es de 0.90; lo cual indica que es confiable para aplicar en alumnos que tengan esas nociones del contenido, para llegar a ese nivel de confiabilidad se aplicó el examen a un grupo de secundaria de 20 integrantes donde extrajeron los datos necesarios como se describe en la tabla 3.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Tabla 3. Prueba Diagnóstica

Escuela Secundaria Diurna No. 207 "Estado de Israel"
Matemáticas III
PRUEBA DIAGNÓSTICA.

Nombre del Alumno: _____

Profesora: Isabel Viridiana Mendoza Nava

SUBRAYA LA RESPUESTA QUE CREAS CORRECTA CON BASE EN LOS CONOCIMIENTOS QUE TENGAS DE ÁLGEBRA

1. ¿Cómo puedes definir las siguientes expresiones?

$5m^2$ *a) Monomio* *b) Binomio* *c) Trinomio* *d) Polinomio*	$26m^3 - 10n^2$ *a) Monomio* *b) Binomio* *c) Trinomio* *d) Polinomio*
$17x^2 + 8y - 5z^3 +$ *a) Binomio* *b) Trinomio* *c) Monomio* *d) Polinomio*	$4c^3 - d^5 + 1$ *a) Polinomio* *b) Trinomio* *c) Binomio* *d) Monomio*

2. *¿Cuáles son los elementos que componen al siguiente término* $+ 5y^3$

a) Exponente, literal, signo
b) Coeficiente, signo, exponente, literal
c) Número, letra, signo
d) Número, exponente

3. ¿Cuáles son los términos semejantes?

a) Aquellos que tienen la misma parte literal y la misma potencia
b) Aquellos que poseen el mismo coeficiente y exponente
c) Aquellos tienen el mismo signo y las mismas letras
d) Aquellos que poseen la misma potencia

4. ¿Cuál es el resultado de desarrollar el binomio $(a+b)^2$***?***

a) $a^2 + b^2$
b) $2a + 2ab + 2b$
c) $a^2 + 2ab + b^2$
d) $a + b$

5. ¿Cuál es el valor de x en la siguiente ecuación? Escribe tu pro un lado

$$x + 9 = -2x + 3$$

a) 1 *b) 2* *c) -2* *d) 6*

6. Reduce la siguiente expresión algebraica, $5xy^2 - 3x^2y + 10$

¿Cómo quedaría?

a) $15xy^2 - 9x^2y^2$
b) $15xy^2 - 3x^2y - 3xy$
c) $-15xy^2 - 6xy$
d) $15xy^2 + 6x^2y - 3xy$

En la figura 1 se describen los resultados de los instrumentos con sus respectivos Alphas.

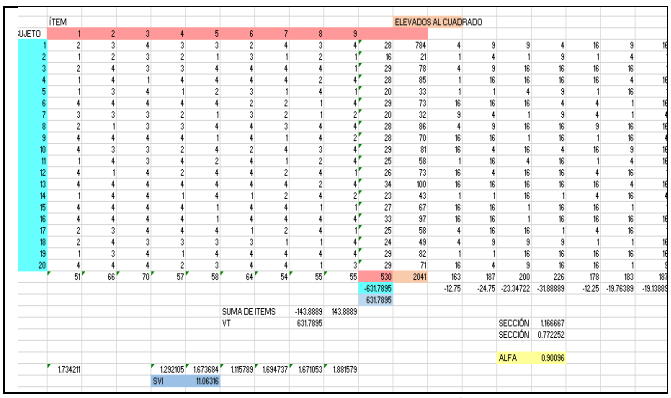


Figura 1. Alpha de la prueba diagnóstica 0.90

Posteriormente se diseñó un examen final el cual definiría si se obtuvo un crecimiento o un decrecimiento al término de la secuencia didáctica; este consta de 5 preguntas, al igual que el anterior cuenta con un Alpha de Cronbach fue de 0.72 alto [2] aplicado a 20 estudiantes. El procedimiento para calcularlo fue el mismo. Se presenta un examen de una alumna ya calificado, justo con los criterios que se pedían descrito en la tabla 4.

Tabla 4. Prueba Final

Escuela Secundaria Diurna No. 207 "Estado de Israel" Matemáticas III
PRUEBA DE CONOCIMIENTOS.

Nombre del Alumno: _____
No. Lista: _____

RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS TOMANDO EN CUENTA LOS CONOCIMIENTOS QUE TIENES SOBRE ÁLGEBRA.

1. Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en función de la cantidad de términos algebraicos que poseen:

$5y - \frac{2}{3}a^2$: Binomio

$2am^3+4b-10m^5z^2$: Trinomio

$\frac{1}{5}x^2z^3$: Monomio

$-2dw^5+5y-7w^5+x$: Polinomio

2. Reduce las siguientes expresiones algebraicas identificando términos semejantes:

$9a^3b+4k^2+7a^3b-6k^2 =$ $16a^3b - 2k^2$

$2a^3-2a^2b+2b^3+3a^2b-4ab^2-4b^3+2ab^2-a^3 =$ $a^3 + a^2b - 2b^3 - 2ab^2$

3. Desarrolla los siguientes productos notables:

$(36a+4b)^2 =$ $1296a^2 + 288ab + 16b^2$

$(12xy+3xz)(12xy-3xz) =$ $144x^2y^2 - 9x^2z^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación lineal especificando las propiedades de los $\mathbb{R}$ que estás utilizando:

$5x+400=3x+1600$ Agrupación de términos semejantes
$5x - 3x = 1600 - 400$ Se aplica inversos multiplicativo e inverso aditivo
$2x = 1200$
$x = \frac{1200}{2}$
$x = 600$

5. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática utilizando como método de resolución la fórmula general:

$x^2+48x = 220$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{3184}}{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{(48)^2 - 4(1)(-220)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2304 + 880}}{2}$$

El rango de puntaje que obtendrán los alumnos en cada aspecto de la rúbrica será de 0 a 1 (dependiendo de cada rubro), tendrá 1 en caso de que desarrollen el procedimiento establecido en el rubro; Obtendrán 0 en caso de que no desarrollen la habilidad esperada en el rubro.

Rúbrica de evaluación:

Pregunta 1	**Puntaje**
Identifica las características que posee un término algebraico. (MÁXIMO 0.5) • Coeficiente • Parte literal • Grado	
Identifica las características que posee una expresión algebraica. (MÁXIMO 0.5) • Coeficiente • Parte literal	
Identifica el concepto de las expresiones algebraicas. (MÁXIMO 0.5) Adición o sustracción de dos o más términos algebraicos	
Relaciona una expresión algebraica con su concepto de forma correcta. (MÁXIMO 0.5)	
Puntaje total (máximo 20 pts.)	
Pregunta 2	**Puntaje**
Identifica las características que posee un término algebraico. (MÁXIMO 0.5) • Coeficiente • Parte literal • Grado	
Identifica qué son dos términos semejantes. (MÁXIMO 0.5) Son aquellos que tienen la misma parte literal.	
Conoce la regla de reducción de términos semejantes y la aplica de forma correcta en expresiones algebraicas. (MÁXIMO 0.5)	
Puntaje total (máximo 15 pts.)	
Pregunta 3	**Puntaje**
Identifica qué es un producto notable. (MÁXIMO 0.5) Son productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser deducido por pura observación.	
Conoce la regla de solución de un binomio al cuadrado. (MÁXIMO 0.5)	
Aplica de forma correcta la regla de solución de un binomio al cuadrado. (MÁXIMO 0.5)	
Conoce la regla de solución de dos binomios conjugados. (MÁXIMO 0.5)	
Aplica de forma correcta la regla de solución de dos binomios conjugados. (MÁXIMO 0.5)	
Puntaje total (máximo 25 pts.)	
Pregunta 4	**Puntaje**
Identifica los elementos de una ecuación lineal. (MÁXIMO 0.25) • Miembros • Términos • Incógnitas • Grado • Soluciones	
Asocia el método de solución de una ecuación lineal con las propiedades de los números reales y de la igualdad (MÁXIMO 1)	
Justifica cada paso de resolución de una ecuación lineal con ayuda de las propiedades de los números reales e igualdad (MÁXIMO 1)	
Resuelve de forma correcta una ecuación lineal con ayuda de las propiedades de los números reales y de la igualdad. (MÁXIMO 0.25)	
Puntaje total (máximo 25 pts.)	
Pregunta 5	**Puntaje**
Identifica los elementos de una ecuación cuadrática. (MÁXIMO 0.25) • Términos • Miembros • Grado • Incógnita • Soluciones	
Conoce la fórmula general. (MÁXIMO 0.25) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
Asocia el proceso de "Despeje" con las propiedades de los números reales y de la igualdad. (MÁXIMO 0.5)	
Aplica de forma correcta la fórmula general en la resolución de una ecuación cuadrática, obteniendo las 2 soluciones de ésta de forma correcta (MÁXIMO 1)	
Puntaje total (máximo 20 pts.)	
Puntaje Final (Valor máximo 100 pts.)	

Cabeza	item1	item2	item3	item4	item5	Total
Amy	20	15	25	15	20	95
Jarol	15	12	13	15	11	66
Bryan	10	7	15	10	10	52
Ariel	20	15	25	10	11	81
Julio	20	9	19	10	11	69
Erick	20	15	25	15	11	86
Tanya	20	15	25	15	11	86
Stacy	20	15	25	15	11	86
María	20	15	25	15	15	90
Juan Pablo	15	9	15	10	15	64
Brayan	8	6	10	11	12	47
José	8	6	10	9.5	10	43.5
Rubén	8	6	10	8.5	10	42.5
Elías	15	10	20	10	15	70
Esteban	12	8	10	8.5	21	59.5
Jessica	18	15	23	12	13	81
Ángel	13	10	20	11	11	65
Jazmín	20	15	25	15	20	95
Osvaldo	10	8	13	12	9	52
María Fer.	20	15	23	12	20	90
Varianzas	22.9894737	13.8	37.536842	6.0914474	15.397368	

Sujetos:	20
Suma de varianzas	95.8151
Varianza total	308.565
k-1	19
k/k-1	1.05263
Sum. Va/Sum. Total	0.31051
1-Sum. Va/Sum. Total	0.68948
Alfa	0.72577

Figura 2. Alpha de la prueba final 0.72

Se realizó un análisis de las preguntas que se plantearon en el diagnóstico y en el examen final, buscando una relación entre cada una de las preguntas, de esta manera se verá si hay avance en las nociones que se tuvieron erróneas en el examen diagnóstico, tal como se puede ver en la tabla 5.

Tabla 5. Correlación entre preguntas

CORRELACIÓN ENTRE PREGUNTAS			
# Examen Final	Conocimientos	# Examen diagnóstico	Conocimientos
1	Clasificación de expresiones algebraicas.	1, 2	Identificación de los elementos de una expresión algebraica
2	Reducción de expresiones algebraicas por medio de la identificación de términos semejantes.	2, 3	Identificación y asociación de los términos semejantes.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

3	Resolución de productos notables.	4	Identificación de productos notables y de sus representaciones algebraicas.
4	Resolución de ecuaciones de primer grado con el uso de propiedades de los ℝ.	5	Identificación de los elementos de una ecuación lineal y resolución de éstas con el uso de la herramienta del "Despeje".
5	Resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general.	6	Identificación de los elementos de una ecuación cuadrática, uso de la fórmula general.

En la figura 3 se muestran algunos ejemplos de los diagramas de flujo desarrollados por los niños.

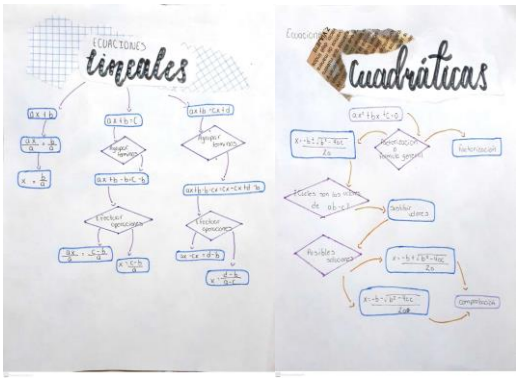


Figura 3. Diagramas de flujo desarrollados por los niños.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en función de su desempeño académico de los alumnos con los que se trabajó y aplicó la secuencia que se diseñó, la evaluación es formativa en un inicio donde se aplica el diagnostico, continua con la evaluación sumativa que se realizaba día con día.

Con base en el examen diagnostico que se presentó, los resultados que se muestran en la figura 4 son del examen diagnóstico que se aplicó en 3ºB y 3ºC, como se puede observar la diferencia es mínima entre los grupos.

Con base en los resultados se puede demostrar que existe un grupo que requiere más actividades, más lecciones acerca de álgebra, que requiere que se trabaje más a fondo los contenidos conceptuales y procedimentales, recordando que todos los grupos aprenden a diferentes ritmos y estilos de aprendizaje.

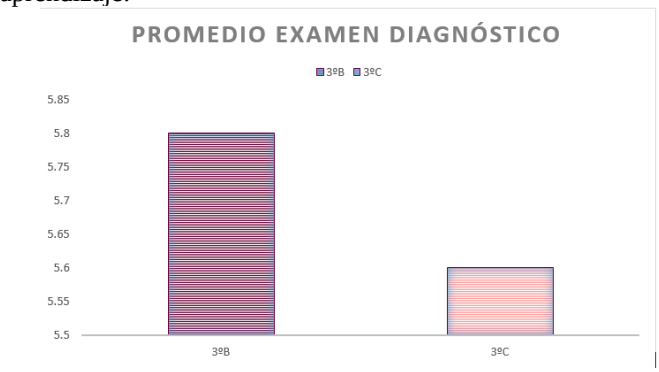


Figura 4. Promedios de Examen Diagnóstico

Con base en la secuencia didáctica que se aplicó en ambos grupos se puede apreciar que se tiene un mayor dominio del tema de investigación en el grupo 3ºB, obteniendo un número mayor en las respuestas.

Al término de la secuencia didáctica se aplicó un examen final de conocimientos y los resultados se muestran detalladamente en la figura 5 y aunque no es número alto, se aprecia que se subió un punto y en el grupo 3ºC se subió un punto y 2 décimas.

Se alcanzaron esos resultados con base en el uso adecuado de los diagramas de flujo, dándolos a conocer a partir de cosas que los alumnos conocen, para esto se diseñó el plan de clase 4 con las actividades del juego online, cuando solo lo juegan y cuando lo tienen que programar, se les explico que no es difícil, solo que se debe de tener paciencia para poder llegar a concluir el juego, que cada comando este bien colocado.

Posteriormente el conocimiento de las propiedades de los números reales y las ecuaciones dándolas a conocer en primer momento sin el lenguaje matemático, solo realizando las operaciones, para posteriormente enseñarlas con el lenguaje matemático, con la transcripción de las propiedades en su respectivo cuadernillo de axiomas y propiedades, fue una propuesta muy acertada porque fue como los alumnos se aprendieron las propiedades y a su vez las supieron aplicar en cada ecuación tomando como herramienta de apoyo los diagramas de flujo que se realizaron en clase.

Figura 5. Resultados de las pruebas

Al enseñarles cómo se hacen de manera manual, se suscitó el interés en que buscarán otras formas de realizarlos, buscando páginas en internet donde puedan realizar.

Conforme realizaron ejercicios practicaron más la resolución de ecuaciones por medio de las propiedades, hasta llegar al punto de ya no utilizar el diagrama de flujo, porque ya saben las propiedades que deben de utilizar en cada caso.

El diseñar una propuesta didáctica mediante el uso de diagramas de flujo como herramienta de apoyo permitió lograr un avance significativo en la apropiación y aplicación del lenguaje algebraico en la resolución de ecuaciones por propiedades, con base en los resultados de un examen diagnóstico en primer momento, se obtuvo que los estudiantes se encontraban en un término medio del conocimiento que se tiene acerca de esta rama de las matemáticas, en un segundo momento y con el apoyo de estos se logró tener un crecimiento hasta el 6.8 de conocimiento, con un mejor dominio de las propiedades algebraicas.

Al mostrarles a los estudiantes los diagramas de flujo con una perspectiva basada en sus intereses fue una idea acertada ya que atrajo su atención, al explicarles que en todos los juegos conllevan a una serie de comandos que son los pasos o etapas que conlleva en juego y al conectar esa idea con la resolución

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

de un problema matemático se identificó que existía una coincidencia, tanto las matemáticas como los juegos son realizados a través de pasos y como es mejor conocido algoritmos, de esta manera se obtuvo un acercamiento positivo de los estudiantes con las propiedades que se utilizarán en cualquier tipo de resolución de ecuaciones.

Al proponerles el uso de una app que ya conocen fue una idea nueva, ya que ellos solo la utilizaban para la resolución de su tarea y al darles un nuevo enfoque al uso de la app, fue un reto para ellos ya que no solo se pedía el resultado para que lo copiarán, se propuso que escribieran las propiedades utilizadas, cabe mencionar que para que la app te de ese tipo de información debes de pagar, cosa que los estudiantes no hicieron por el simple hecho de que utilizaban los diagramas de flujo para tener el ejercicio bien realizado.

III. Propuesta didáctica para la enseñanza de razones trigonométricas mediante el uso de mnemotecnia y el geoplano trigonométrico en grupos de 3er grado

Se realizaron prácticas con los alumnos de secundaria durante siete jornadas intercaladas en el período del ciclo escolar en la Escuela Secundaria “Francisco I. Madero” No. 26, ubicada en la Calle José Rosas Moreno 64, San Rafael, Alcaldía Cuauhtémoc, Ciudad de México; trabajando específicamente en los grupos B, D y E; se seleccionó un contenido específico de la materia y del grado de acuerdo a los planes y programas (SEP, 2011) [1]; la propuesta corresponde al tema de “razones trigonométricas seno, coseno y tangente”.

Es necesario conocer las dinámicas de los grupos con los que se está trabajando, ritmos, sus formas de trabajo, y áreas de oportunidad para desarrollarlas con la aplicación de la propuesta.

Se diseñaron dos instrumentos con validez para diagnosticar y evaluar los conocimientos de los alumnos, el diseño de las secuencias y los resultados obtenido antes y después de la aplicación de la propuesta diseñada.

Se eligió a los grupos B y D de tercer grado para diseñar la propuesta; la matrícula es de 34 estudiantes para el grupo B y 36 para el D teniendo irregularidades por diferentes motivos de ausencias, de bajas, de suspensión o altas de los alumnos.

Para estudiar los estilos de aprendizaje de cada uno de los grupos se utilizó el instrumento de medición de estilos de aprendizaje de la Programación Neurolingüística de Bladeer y Grinder (1998) [6]; el cual cuenta con un Alpha de Cronbach de 0.890: al aplicarlo se obtuvo un resultado para el grupo B de 78% visual, 11% kinestésico, 11% auditivo y para el grupo D 44% visual, 32% kinestésico y 24% auditivo.

Es importante conocer las relaciones sociales y académicas de los alumnos, con los resultados obtenidos en cada grupo se permite identificar a los alumnos que son líderes y están en rechazo tanto social como académicamente.

Se aplicó un test de actitudes hacia las matemáticas de Dorinda Mato (2010) [7], el cual cuenta con un Alpha de Cronbach de 0.97 de confiabilidad, para identificar que tan importantes consideran los alumnos las matemáticas, si les encuentran utilidad, si les parecen atractivas o no, ya que esa actitud que se tiene al respecto influye directamente en que los alumnos aprendan o no porque se mostraran positivos o negativos para aprenderlas, obteniendo que los alumnos consideran las matemáticas útiles para la vida con un 67% en el grupo B y un 59% en el grupo D.

El nivel socioeconómico de los alumnos es un factor necesario de conocer, por ello se aplicó un cuestionario de Evaluación del Nivel Socioeconómico de Romero (2012) [8], con Alpha Cronbach de 0.9017; dividido en tres categorías: Bajo inferior, Bajo superior y Medio; en el grupo B se obtuvo un 6%, 36% y 58%, en el grupo D un 28%, 44% y 28% respectivamente.

Para medir los valores de los alumnos se aplicó un test de Antolín Suárez (2010) [9], el cual cuenta con un Alpha de Cronbach dividido en valores sociales con un Alpha de 0.89, valores personales con Alpha de 0.89 y valores individualistas con Alpha de 0.80; para el grupo B se obtuvo 74.07%, 92.59%, y 83.33% y para el grupo D 83.80%, 81.90% y 78.09% respectivamente.

En el caso de los conocimientos geométricos se aplicó un test de Ana Belén Cabello (2013) [10], con un Alpha de Cronbach de 0.938; además considera aprendizajes que van desde identificar tipos de rectas, ángulos y la obtención de áreas de diferentes polígonos en un total de 15 reactivos que fueron disminuidos a 7:

Reactivo 1. Rectas paralelas, secantes y perpendiculares.

Reactivo 2. Tipos de ángulos, agudo, obtuso, llano y recto.

Reactivo 3. Propiedades de los ángulos formados entre rectas paralelas y una transversal.

Reactivo 4. Mediatriz de un segmento.

Reactivo 5. Nombres y fórmulas para obtener el área de diferentes polígonos como cuadrado, rectángulo y romboide.

Reactivo 6. Propiedades de un polígono (pentágono), Radio, apotema, lados y centro.

Reactivo 7. Calculo del área de un triángulo.

Del grupo “B” en el reactivo 3 y 4 el 50 % contestó correctamente y el otro 50% incorrectamente, y en el reactivo 2 con 54% respondieron erróneamente, en el grupo D en los mismos reactivos respectivamente se obtuvo un 75%, 68% y un 32%; con ello se identifica que los alumnos en ambos grupos tienen los básicos.

Para la enseñanza del contenido se utilizó un instrumento manipulable, el cual fue construido por los alumnos, ya que de acuerdo con Duval (1999) [11], las figuras geométricas deben ser construibles con ayuda de instrumentos para guiar los movimientos necesarios de construcción, así los alumnos en el proceso de construcción identifican, proponen y adquieren el conocimiento implícitamente. Además, según Cancio (2005) [12], los medios materiales funcionan como un soporte para relacionar los aprendizajes con las metodologías y actividades usadas para lograr los objetivos que se tienen, así los recursos manipulables son un medio para facilitar el aprendizaje de los contenidos. Para la enseñanza de las razones trigonométricas se diseñó un geoplano trigonométrico que de acuerdo con Mariño (2000) [13], con dicho instrumento “… se pueden plantear en clase situaciones problemáticas auténticas, de contexto geométrico y espacial, que permitan al estudiante focalizar entornos de aprendizaje que los habitúen a experimentar y probar a partir de sus propias acciones, tanto experimentales como mentales, compartiendo su práctica y mentalización con sus propios compañeros y el docente.” (p.56). La construcción de dicho instrumento se realizó en una clase y previo a la implementación de la secuencia didáctica para la aplicación de la propuesta se utilizó una mnemotecnia adaptada al contenido de razones, según Pascual (2014) [14], la nemotecnia es una técnica para memorizar información o datos de manera más eficiente y rápida; con una variación de la técnica en imágenes se logró que los alumnos identificaran

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

correctamente el cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa en el triángulo rectángulo, usando colores para cada uno de los lados, esta técnica facilitó la memorización de dichos elementos.

La primera sesión de la aplicación de la propuesta para la enseñanza de las razones trigonométricas se enfocó en la identificación de los lados del triángulo rectángulo, con apoyo de material concreto se identificó el cateto opuesto de color azul, el cateto adyacente de color rojo y la hipotenusa de color verde, aplicando la mnemotecnia de los colores y definiendo con argumentos matemáticos cada uno de los lados; además dicha sesión se enfocó en el reconocimiento de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente usando la fórmula correspondiente a cada una y literales para la sustitución en las fórmulas, así con varios ejercicios de reconocimiento e identificación se reforzó en los alumnos el conocimiento adquirido.

En la segunda sesión el alumno con uso del geoplano trigonométrico formó triángulos rectángulos dado un ángulo central, se comenzó con el ángulo de 45°, en dicha actividad se considera el circulo unitario trazado en un plano cartesiano que forma el geoplano, con él los alumnos reconocen que en cada cuadrante del círculo dado un ángulo se pueden formar 4 triángulos rectángulos con las mismas medidas en los catetos, por ello se reducen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente al primer cuadrante del círculo, como se muestra en la figura 6.

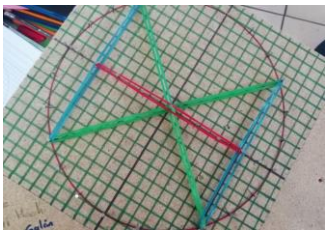


Figura 6. Aplicación de la secuencia.

Para la tercera sesión se utiliza el geoplano trigonométrico, en él se forman triángulos rectángulos con los colores correspondientes de cada lado, dado un ángulo central de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° y 90°, para que así los alumnos midan cada lado usando las unidades del plano cartesiano (cada una de 1 cm para medidas exactas), con dichas medidas se sustituyen en las fórmulas de las razones seno, coseno y tangente obteniendo un valor decimal de cada uno de los ángulos, logrando a su vez que los alumnos identifiquen que existen ángulos que tienen el mismo valor decimal en diferente razón, por ejemplo el valor del coseno de 30° y el seno de 60° es de 0.8660; los alumnos logran argumentar matemáticamente la razón de los valores.

En la cuarta sesión dadas las medidas de dos lados del triángulo rectángulo, como primera actividad los alumnos reconocieron en varios ejercicios la razón adecuada para encontrar el valor de un ángulo, usando la mnemotecnia de los colores; en la segunda actividad los alumnos reconocieron y además aplicaron adecuadamente la razón necesaria para calcular el ángulo que se pedía.

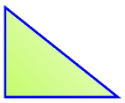
La quita sesión se llevó a cabo considerando la cuarta sesión, en esta sesión dadas las medidas de dos lados los alumnos reconocieron y aplicaron la razón adecuada para calcular el valor del tercer lado, en esta sesión los alumnos debían tener como conocimiento previo la realización de despejes que serían necesarios para el cálculo.; usando además la mnemotecnia.

En la sexta y última sesión los alumnos realizaron cálculos de un ángulo o un lado de un triángulo rectángulo haciendo uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente sin el uso de mnemotecnias, en diferentes triángulos rectángulos de la tabla 6.

Tabla 6. Examen diagnóstico

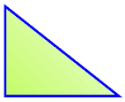
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1. Selecciona el nombre de la siguiente figura.



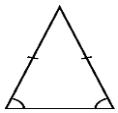
a) Triángulo obtusángulo
b) Triángulo isósceles
c) Triángulo rectángulo
d) Triángulo escaleno

2. ¿Cuáles son las propiedades de la figura anterior?



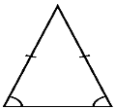
a) Tiene sus 3 lados y ángulos iguales
b) Tiene 2 ángulos agudos y un ángulo recto
c) Tiene solo 2 lados y 2 ángulos iguales
d) Tiene 2 ángulos agudos y uno obtuso

3. Selecciona el nombre de la siguiente figura.



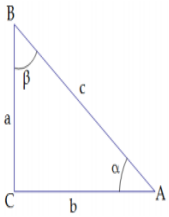
a) Triángulo obtusángulo
b) Triángulo isósceles
c) Triángulo rectángulo
d) Triángulo escaleno

4. ¿Cuáles son las propiedades de la figura anterior?



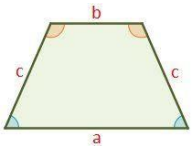
a) Tiene sus 3 lados y ángulos iguales
b) Tiene 2 ángulos agudos y un ángulo recto
c) Tiene solo 2 lados y 2 ángulos iguales
d) Tiene 2 ángulos agudos y un ángulo obtuso

5. De acuerdo al siguiente triángulo selecciona aquella opción que indique adecuadamente el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa respecto al ángulo α.



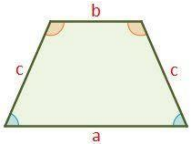
a) "a" es el cateto opuesto, "b" el cateto adyacente y "c" es la hipotenusa
b) "b" es el cateto opuesto, "a" el cateto adyacente y "c" es la hipotenusa
c) "a" es el cateto opuesto, "c" el cateto adyacente y "b" es la hipotenusa
d) "c" es el cateto opuesto, "a" el cateto adyacente y "b" es la hipotenusa

6. Selecciona el nombre de la siguiente figura.



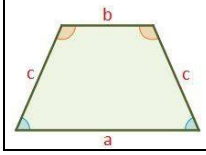
a) Trapecio escaleno
b) Trapecio rectángulo
c) Trapecio isósceles
d) Trapezoide

7. ¿Cuáles son las propiedades de la figura anterior?



a) Tiene 2 lados y 2 ángulos iguales
b) Tiene todos sus lados y ángulos desiguales
c) Tiene dos pares de lados y dos pares de ángulos iguales
d) Tiene 2 lados y dos pares de ángulos iguales

8. ¿Cuál es la fórmula para obtener el área de la figura anterior?



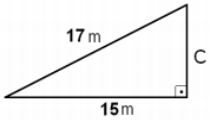
a) $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
b) $A = \frac{b \cdot h}{2}$
c) $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
d) $A = b \cdot a$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

9. ¿Cuál es la fórmula para obtener algún lado de un triángulo rectángulo?

a) $C^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
b) $A = \frac{b \cdot h}{2}$
c) $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
d) $A = b \cdot a$

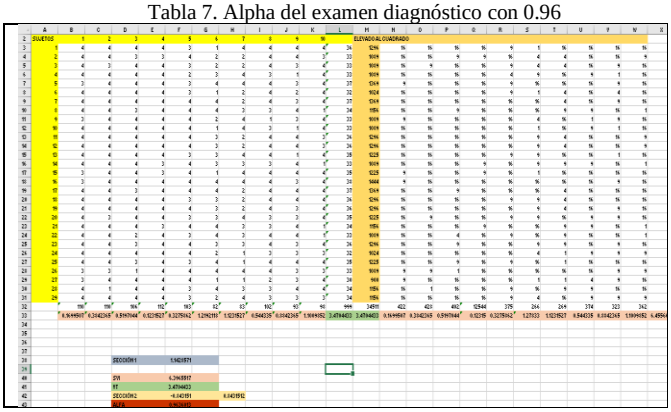
10. De acuerdo al siguiente triángulo, ¿Cuál es la medida del lado C?



a) 22.67m
b) 5.6m
c) 8m
d) 17.4m

Para el examen diagnóstico se obtuvo un Alpha de 0.96, como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Alpha del examen diagnóstico con 0.96

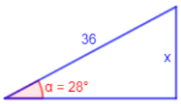


Al término de la implementación de la propuesta didáctica se realizó una prueba final con el fin de medir los avances en los aprendizajes de los alumnos tras aplicar los materiales concretos y la técnica de mnemotecnia para la enseñanza de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, por ello se diseñó e implementó un instrumento con un total de 7 reactivos y con un Alpha de Cronbach de 0.94; los reactivos consideraron la identificación de los catetos e hipotenusa, el reconocimiento de la razón necesaria para realizar el cálculo que se pedía y la aplicación adecuada para obtener el resultado correcto descrito en la tabla 8.

Tabla 8. Examen final

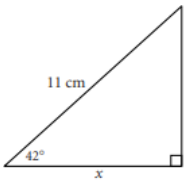
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN FINAL

I. Del siguiente triángulo rectángulo, ¿cuál es el valor de x?.



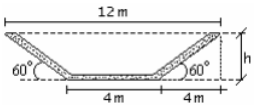
a) X= 19.143 u
b) X= 16.562 u
c) X= 16.902 u
d) X= 31.784 u

II. Calcula el valor de x del siguiente triángulo rectángulo.



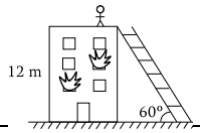
a) X= 8.5341 cm
b) X= 6.7451 cm
c) X= 13.9223 cm
d) X= 8.1741 cm

III. ¿Cuál es el área de un canal trapecial que está representado en la siguiente figura?



a) A= 50.424 m^2
b) A= 45.753 m^2
c) A= 55.424 m^2
d) A= 44.754 m^2

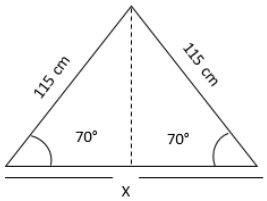
IV. En un edificio hay un incendio y se tiene que rescatar a una persona del techo. Los bomberos conocen la altura del edificio, que es de 12 m, y la inclinación de seguridad para colocar una escalera es de 60°. ¿Cuál debe ser la longitud mínima de la escalera para llegar al techo y realizar el recate?



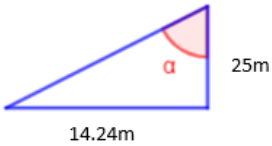
a) X= 20.4122 m
b) X= 13.8568 m
c) X= 18.7134 m
d) X= 10.3268 m

V. Dos lados de un triángulo isósceles miden 115 cm. Si los ángulos de la base miden 70° cada uno. ¿Cuánto mide la base?, con un dibujo ejemplifica la situación redactada.

a) B= 104.41 cm
b) B= 78.66 cm
c) B= 87.06 cm
d) B= 216.12 cm

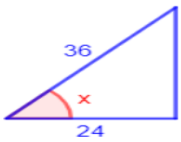


VI. ¿Cuál es el valor de α en el siguiente triángulo rectángulo?



a) α = 70°30'
b) α = 26°56'
c) α = 34°43'
d) α = 29°40'

VII. ¿Cuál es el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo?



a) X= 45°40'
b) X= 41°48'
c) X= 48°11'
d) X= 33°41'

Para el examen final se obtuvo un Alpha de 0.94, como se muestra en la Tabla 9.

Tabla 9. Alpha 0.94 de examen final

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

	ITEMS								ELEVADO AL CUADRADO						
SUJETOS	1	2	3	4	5	6	7								
1	4	3	3	4	2	1	2	19	361	16	9	9	16	4	1
2	4	3	1	3	2	4	3	20	400	16	9	1	9	4	16
3	1	4	4	4	2	4	2	21	441	1	16	16	16	4	16
4	2	3	4	4	2	3	4	22	484	4	9	16	16	4	9
5	3	1	4	2	4	2	4	20	400	9	1	16	4	16	4
6	3	4	3	4	4	4	2	24	576	9	16	9	16	16	16
7	3	1	4	1	4	2	4	19	361	9	1	16	1	16	4
8	4	4	1	2	4	4	4	23	529	16	16	1	4	16	16
9	2	2	3	4	3	4	4	22	484	4	4	9	16	9	16
10	1	1	3	1	2	4	4	16	256	1	1	9	1	4	16
11	2	3	2	1	2	3	3	16	256	4	9	4	1	4	9
12	2	4	3	1	4	4	4	22	484	4	16	9	1	16	16
13	1	4	3	1	3	4	4	20	400	1	16	9	1	9	16
14	3	4	4	2	4	4	4	25	625	9	16	16	4	16	16
15	2	3	4	1	4	4	4	22	484	4	9	16	1	16	16
16	2	4	4	3	4	4	3	23	529	4	16	16	9	16	16
17	3	2	4	2	4	3	4	22	484	9	4	16	4	16	9
18	3	2	3	4	4	3	3	21	441	9	4	9	16	16	9
19	4	4	1	3	3	4	1	20	400	16	16	1	9	9	16
20	1	4	4	3	3	3	2	20	400	1	16	16	9	9	9
21	4	4	4	1	3	2	4	22	484	16	16	16	1	9	4
22	4	4	3	3	2	3	3	22	484	16	16	9	9	4	9
23	4	2	4	2	3	3	4	22	484	16	4	16	4	9	9
24	4	1	4	4	3	3	3	22	484	16	1	16	16	9	9
25	3	2	3	4	4	3	2	21	441	9	4	9	16	16	9
26	1	4	4	4	3	3	3	22	484	1	16	16	16	9	9
27	3	4	4	3	4	1	3	22	484	9	16	16	9	16	1
	73	81	88	71	86	86	85	570	12140	229	277	312	225	292	296
	1.2165242	1.3076923	0.963661	1.4729245	0.6951567	0.0490028	0.9002849	4.1025641	4.1025641	1.2165242	1.3076923	0.963661	1.4729245	0.6951567	0.0490028

SECCIÓN1	1.1666667
SVI	7.4102564
VT	4.1025641
SECCIÓN2	-0.00625 0.00625
ALPHA	0.940625

El instrumento de evaluación diagnóstica mantiene una relación con el instrumento de evaluación final, ya que ambos tienen el objetivo de medir los conocimientos antes y después de la implementación de la propuesta didáctica. En la tabla se muestra cada reactivo del instrumento final y los reactivos del instrumento diagnóstico que considera, además en cada uno se definen los conocimientos que el alumno debe de tener para responderlos adecuadamente como se describe en la Tabla 10.

Tabla 10. Correlación de exámenes.

NÚM. PREGUNTA EXAMEN FINAL	CONOCI-MIENTOS	NÚM. EXAMEN DIAGNÓSTICO	CONOCI-MIENTOS
1	Aplicación de la función seno, despejar una variable, identificar el cateto opuesto e hipotenusa de un triángulo rectángulo.	1, 2, 5 y 10	Propiedades de triángulos, identificar catetos e hipotenusa respecto a un ángulo, cálculo del lado de un triángulo rectángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición, multiplicación y raíz cuadrada.
2	Aplicación de la función coseno, despejar una variable, identificar el cateto adyacente e hipotenusa de un triángulo rectángulo.	1, 2, 5 y 10	Propiedades de figuras geométricas, identificar catetos e hipotenusa respecto a un ángulo, cálculo del lado de un triángulo rectángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición y de la multiplicación y raíz cuadrada.
3	Cálculo del área de un trapecio usando la función tangente, despejar una variable, identificar el cateto opuesto y adyacente de un triángulo rectángulo.	2, 5, 6, 7, 8 y 9	Propiedades de un trapecio y un triángulo rectángulo, identificar catetos e hipotenusa respecto a un ángulo del triángulo, fórmula para obtener el área de un trapecio, despejar una variable, operación inversa de la adición y la multiplicación.
4	Aplicación de la función seno, despejar una variable, identificar el cateto opuesto e hipotenusa de un triángulo rectángulo.	1, 2, 5 y 10	Propiedades de triángulos, identificar catetos e hipotenusa respecto a un ángulo, cálculo del lado de un triángulo rectángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición, multiplicación y raíz cuadrada.
5	Cálculo de la base de un triángulo isósceles usando la función coseno, despejar una variable, identificar el cateto adyacente e hipotenusa de un triángulo rectángulo y las propiedades de un triángulo isósceles.	3, 4 y 5	Propiedades de un triángulo isósceles y un triángulo rectángulo, identificar catetos e hipotenusa respecto a un ángulo del triángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición y la multiplicación.
6	Aplicación de la función tangente.	5 y 10	Identificar el cateto opuesto y adyacente respecto a un ángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición, multiplicación y raíz cuadrada.
7	Aplicación de la función coseno.	5 y 10	Identificar el cateto adyacente e hipotenusa respecto a un ángulo, despejar una variable, operación inversa de la adición, multiplicación y raíz cuadrada

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Al realizar el análisis de los resultados en los instrumentos de evaluación tanto diagnóstico como final, se identificaron las respuestas dadas por los alumnos de tercer año, siendo un 37.25% de las preguntas contestadas correctamente en el instrumento diagnóstico, con un total de 66 alumnos que lo resolvieron.

En el caso del instrumento de evaluación final se determinó el nivel de los alumnos en su conocimiento adquirido de ambos grupos en los que se trabajó, es decir sus conocimientos abarcaban el 58.75%, con un total de 61 alumnos que resolvieron dicho instrumento.

Los resultados obtenidos de manera general correspondiente al contenido de razones trigonométricas seno, coseno y tangente se analizaron con los porcentajes obtenidos, y los discentes; con ello se analizó el incremento de los conocimientos de los alumnos al aplicar la propuesta didáctica, se obtuvo un 21.50% de diferencia entre los resultados, es decir el incremento de los conocimientos. En la figura 7 se observan los resultados de cada instrumento y su incremento.

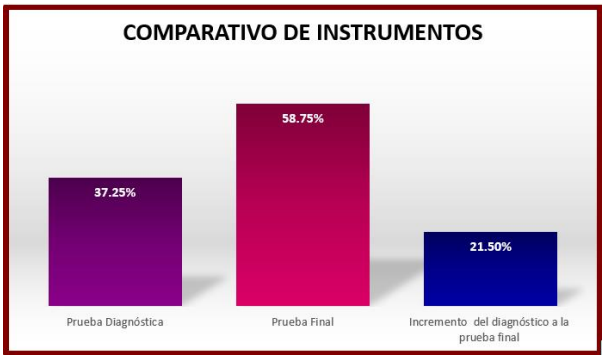


Figura 7. Comparativo de instrumentos.

Al diseñar una propuesta didáctica basada en una estrategia mnemotécnica y el geoplano trigonométrico para la enseñanza de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente en los grupos B y D de tercer año de la Escuela Secundaria "Francisco I. Madero" No. 26, donde se desarrollaron las habilidades geométricas de los alumnos, mediante el uso de una estrategia mnemotécnica que promueve la memorización de conceptos de acuerdo a Pascual (2014) [14]; esto permitió lograr la identificación correcta de los lados de un triángulo rectángulo en relación a las razones trigonométricas; en el transcurso de la primera a la quinta sesión los alumnos indicaban los lados con el color correspondiente; en la primera sesión se construyó el geoplano trigonométrico como se muestra en el diario de campo anexo 1; el uso del geoplano trigonométrico en la segunda y tercera sesión fomentó el interés en los alumnos al ser un recurso manipulable como lo menciona Cancio (2005) [12], visual y kinestésico, coincidiendo con el diario de campo anexo 1; en el que se describe el interés, la participación y disposición que tuvieron los alumnos al trabajar en el transcurso de las sesiones; en la cuarta y quinta sesión de la secuencia didáctica se les presentó el reto a los alumnos de calcular valores de lados o ángulos en triángulos rectángulos con el apoyo de la estrategia mnemotécnica (uso de colores en los lados del triángulo), lo cual desarrollo la memorización de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente; así mismo en la sexta sesión se calculó lados o ángulos de triángulos sin el uso de la mnemotecnia y de acuerdo al diario de campo, se observó que los alumnos en su mayoría resolvió correctamente los ejercicios presentados, identificando la razón trigonométrica correspondiente y su aplicación adecuada para encontrar los valores que se pedían en cada caso; por lo tanto, se identificó un avance en ambos grupos con un incremento del 21.50% de los conocimientos geométricos antes en la prueba diagnóstica y después en la prueba final tras aplicar la estrategia mnemotécnica y el geoplano trigonométrico.

La estrategia mnemotécnica usada como lo menciona Pascual (2014)[14], es una técnica para memorizar conceptos o ideas, con ella se logró que los alumnos recordaran los lados del triángulo rectángulo y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente logrando que las aprendieran con el repaso diario de las mismas; de igual forma la base para la utilización del geoplano trigonométrico es la mnemotecnia, con ella se indicó con las ligas elásticas del color correspondiente los catetos e hipotenusa, logrando un mayor interés y memorización en los alumnos con el recurso usado, coincidiendo con Arceo y Rojas (2002) [15], así mismo se fomentó el descubrimiento por parte de los alumnos con la guía de la profesora, con la que se observaron y obtuvieron resultados positivos con un incremento favorable del 17.26% en el 3°B y un 12.45% en el 3°D en las actitudes que mejoraron los alumnos hacia el estudio las matemáticas, notándose una diferencia de 31 alumnos en ambos grupos que entendieron la importancia de las matemáticas después de la prueba final y el desarrollo de los planes de clase; así mismo las diferencias del test de habilidades geométricas de ambos grupos fue de un incremento del 25.43% en el 3°B y un 22.29% en el 3°D en las respuestas correctas de los reactivos, siendo el mayor incremento del 31% en el reactivo 7 que causo mayor conflicto en el diagnóstico

Las estrategias utilizadas para el desarrollo del tema lograron favorecer los aprendizajes de los alumnos, ya que en el comparativo de instrumentos de la prueba diagnóstica aplicada permitió lograr un 37.25% de resultados correctos en los reactivos, en la prueba final se logró un 58.75% de respuestas correctas; es decir el incremento fue del 21.50% en ambos grupos tras aplicar la propuesta didáctica de la estrategia mnemotécnica relacionada con el geoplano trigonométrico, ya que se usaron como un apoyo pedagógico en la adquisición del conocimiento como lo menciona Sánchez (1993) [16]; ambos recursos fueron favorables para los alumnos además de lograr que ellos fueran parte de la construcción de su material como lo menciona Duval (1999) [11], ya que los instrumentos construidos son una guía para que los alumnos identifiquen las propiedades de las figuras por lo que en ambos grupos se identificó un gran interés y disposición al construir sus trabajos, los alumnos identificaban las propiedades de la circunferencia y el plano cartesiano en relación al tema de razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

La implementación de la estrategia mnemotécnica y el geoplano trigonométrico fomentó en los alumnos un interés en el contenido de razones trigonométricas seno, coseno y tangente, como se observa en los resultados del diagnóstico considerando un total de 66 alumnos que aplicaron la prueba diagnóstica donde se analizó y logró un promedio del 37.2 de puntos en el nivel estratégico y un 28.8 de puntos en el nivel inicial receptivo de los puntos totales en los 10 reactivos; es decir un poco más de la mitad de los alumnos tenían los conocimientos básicos de la geometría y posterior a la aplicación de la propuesta diseñada con base a la estrategia mnemotécnica y el geoplano trigonométrico se incrementaron los niveles en que se encuentran los alumnos de acuerdo a sus

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

conocimientos geométricos y trigonométricos, ya que en la prueba final se aumentaron dos niveles más en el análisis de los resultados obtenidos y de un total de 61 alumnos que la aplicaron se logró un promedio del 42.42 de puntos en el nivel estratégico, en el nivel autónomo un 4.86 de puntos, en el básico un 4.29 de puntos y en el inicial receptivo un 7.14 de los puntos totales de los 7 reactivos, por lo que más de la mitad de ambos grupos desarrolló los aprendizajes necesarios para resolver adecuadamente la prueba final, como lo menciona Brousseau (1997) [17] en su teoría de las situaciones didácticas, que sustentó la investigación, ya que el aprendizaje de los alumnos se logró con un enfoque constructivista y con el apoyo de recursos pedagógicos que relacionaron los conocimientos previos con los que se adquirieron, ya que los conocimientos no se dan por si solos, deben de intervenir diversos factores, como los recursos utilizados del geoplano trigonométrico, estrategias como mnemotecnia, trabajo colaborativo que favorece el intercambio de ideas, conocimientos y la guía de una tercera persona que oriente los aprendizajes ya que el docente es una pieza clave, su metodología y su didáctica para la adquisición de los aprendizajes de los estudiantes.

IV. Diseño de una propuesta didáctica holográfica para visualización y justificación del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares en 2° grado

La propuesta didáctica se llevó acabo en La Escuela Secundaria General No. 87 "República de Filipinas" turno matutino situada dentro de la demarcación de la delegación Gustavo A. Madero en una zona urbana, se aplicó la secuencia didáctica del tema "justificación del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares" en un grupo de 2° grado diseñando un material holográfico, debido a que al aplicar un test de VAK con escala de Likert obtenido de Metts Ralph (1999)[4]; los resultados demostraron que el 40% de los alumnos es visual y esto permitirá la observación del holograma que se proyecta en una pirámide trapezoidal hecha con acetatos.

La propuesta didáctica se basó desde la perspectiva de Raymond Duval (2005) [18], la geometría es un campo que exige la articulación cognitiva de dos registros de representación muy diferentes, el primero de ellos es la visualización de formas para representar en el espacio y el segundo, la lengua para enunciar propiedades y elementos que conforman el marco teórico que identifica la clase de geometría sobre la cual se reflexiona. Las figuras geométricas ayudan a la solución de un problema a lo que hace diferencia de un dibujo pues este no se puede ver de la misma forma que de la figura; lo que Duval establece como una "diferencia funcional". Por ello los alumnos identifican de manera más precisa los elementos de una figura regular en forma holográfica que al preguntarle sin ninguna protección o dibujo.

La visualización se presenta frente a las formas de representación que relaciona las unidades significantes que hacen presente a objeto matemático, el estudio de la geometría se involucra tres tipos de procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas: Procesos de Visualización, procesos de construcción y procesos de razonamiento. Duval (2005) [18].

Lee (2013) [19] comenta cómo la adecuada implementación de los hologramas en las aulas hace que los alumnos se vena sumergidos en un ambiente llamativo que hace que estén centrados y que construyan su propio aprendizaje a partir de sus propias experiencias previas.

Orcos (2018) [20] menciona que: "Así la formación del profesorado es decisiva a la hora de conseguir que el holograma se convierta en un medio a partir del cual se pude llegar al conocimiento" (p. 95)

Para la elaboración de una propuesta didáctica holográfica se construyeron instrumentos de evaluación tanto diagnostica como final; de acuerdo con los planes y programas (SEP,2017) [21] en el tema "justificación del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares". Para dar inicio con la propuesta el instrumento diagnostico sirvió como guía para la elaboración de la propuesta, saber a partir de que concepto iniciar para poder construir un conocimiento formal. La prueba final nos ayudará a comprobar los objetivos del tema y el nivel de avance por parte de los alumnos tanto en definiciones como en solución de problemas.

Con ayuda del programa de Paint se diseñaron las figuras regulares de 3 a 7 lados con sus respectivos elementos de acuerdo con el número de lados, ángulos, diagonales, etc.; una vez construidas, con ayuda del programa power point se acomodaron en forma de cruz con un fondo negro, en el centro se colocaba una pirámide trapezoidal hecha a base de acetatos, esta proyectaba un holograma de acuerdo con la figura regular seleccionada, como se muestra en la figura 8.

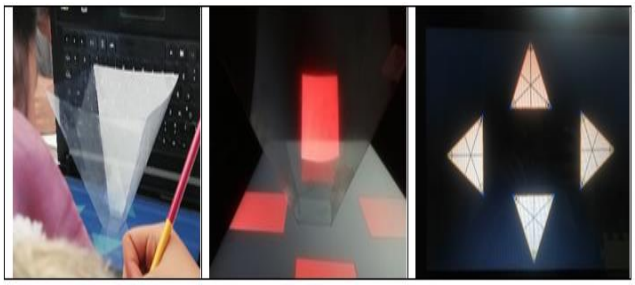


Figura 8. Hologramas de cuerpos.

Para identificar las dificultades del alumno sobre el tema de justificación del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares se realizó la siguiente prueba diagnóstica de la tabla 11.

Tabla 11. Prueba diagnóstica.

Nombre: _____
Grado: _____ Grupo: _____

1. Un polígono es…
   a) Es una figura geométrica formada por segmentos rectos (llamados lados) unidos de forma que encierran un área en el plano.
   b) La región del plano formada por una poligonal cerrada y todos los puntos interiores a ella.
   c) Una línea poligonal cerrada.
   d) Todas las anteriores

2. ¿Cuántos lados máximos puede tener un polígono?
   a) 10
   b) 1000
   c) Infinitos menos 1
   d) Infinitos

3. Los polígonos de 5 lados se llaman…
   a) Heptágonos
   b) Hexágonos
   c) Pentágonos
   d) Ninguna de las anteriores.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

4. ¿Los polígonos deben tener sus lados siempre iguales?
   a) Si
   b) No
   c) Solo algunos
   d) Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cuáles son los elementos de un polígono?
   a) Lados y vértices
   b) Lados vértices y diagonales.
   c) Lados, vértices y ángulos.
   d) Lados, vértices, ángulos y diagonales.

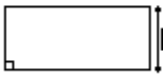
6. ¿Cuáles son los tipos de ángulos que tiene un polígono?
   a) Interiores.
   b) Exteriores.
   c) Interiores y exteriores.
   d) Ninguna de las anteriores.

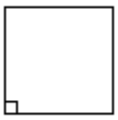
7. ¿Qué es una circunferencia?
   a) Es una curva plana y cerrada tal que todos sus puntos están a igual distancia del centro.
   b) Es una línea curva, plana y cerrada.
   c) Es la unión de puntos infinitos curvos.
   d) Ninguna de las anteriores.

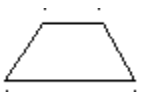
8. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono?
   a) 9
   b) 8
   c) 12
   d) 7

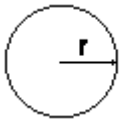
9. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a…
   a) 180°
   b) 90°
   c) 360°
   d) Ninguna de las anteriores.

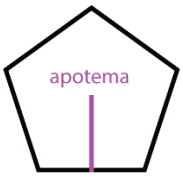
10. Relaciona la fórmula para obtener el área de cada figura.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

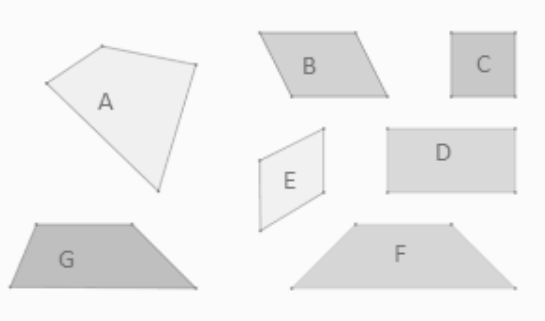
a) A= L x L
b) A= $\frac{h\,(B+b)}{2}$
c) A= π x r^2
d) A= $\frac{P\ X\ a}{2}$
e) A= b x h

   a) 1 a), 2b), 3c), 4d) y 5e).
   b) 1 e), 2 a), 3b) 4 c) y 5d).
   c) 1 b), 2 e), 3 a), 4 d) y 5c).
   d) 1 c), 2 d), 3 e), 4 a) y 5 b)

11. ¿Qué es un vértice?
   a) Punto en el que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono.
   b) La unión entre los segmentos que originan un ángulo.
   c) Un vértice es el punto donde se encuentran dos o más elementos unidimensionales.
   d) Todas las Anteriores.

12. ¿Qué es un cuadrilátero?
   a) Una figura de 4 lados.
   b) Una figura con 4 lados iguales
   c) Una figura con cuatro lado iguales o desiguales
   d) Ninguna de las anteriores.

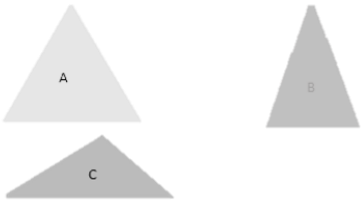
13. De las siguientes figuras cuales son paralelogramos.



   a) Todas excepto A.
   b) Todas Excepto A y G.
   c) Todas.
   d) Sólo B, C, D Y E.

14. ¿Cuántas veces cabe el diámetro del círculo en su circunferencia?
   a) 3
   b) 3.1416
   c) 5
   d) Depende del valor del diámetro.

15. Relaciona los nombres de los triángulos con cada uno de ellos.



   a) A (EQUILATERO), B (ISOSCELES), C (ESCALENO).
   b) A (ISOSCELES), B (EQUILATERO), C (ESCALENO)
   c) A(ESCALENO), B (ISOCELES), C(EQUILATERO)
   d) A (EQUILATERO), B (ESCALENO), C (ISOSCELES).

16. Dos rectas en un plano son paralelas…
   a) Si se cortan en un punto
   b) Si solo tienen un punto en común
   c) Si no tienen ningún punto en común.
   d) Ninguna de las anteriores.

17. Un segmento es…
   a) La parte comprendida entre 2 puntos
   b) Dos puntos unidos por una línea
   c) Una recta pequeña
   d) Ninguna de las anteriores.

18. Si la suma de 2 ángulos es 120° y uno de ellos mide 45°, ¿el otro cuanto mide?
   a) 45°
   b) 165°
   c) 75°
   d) 70°

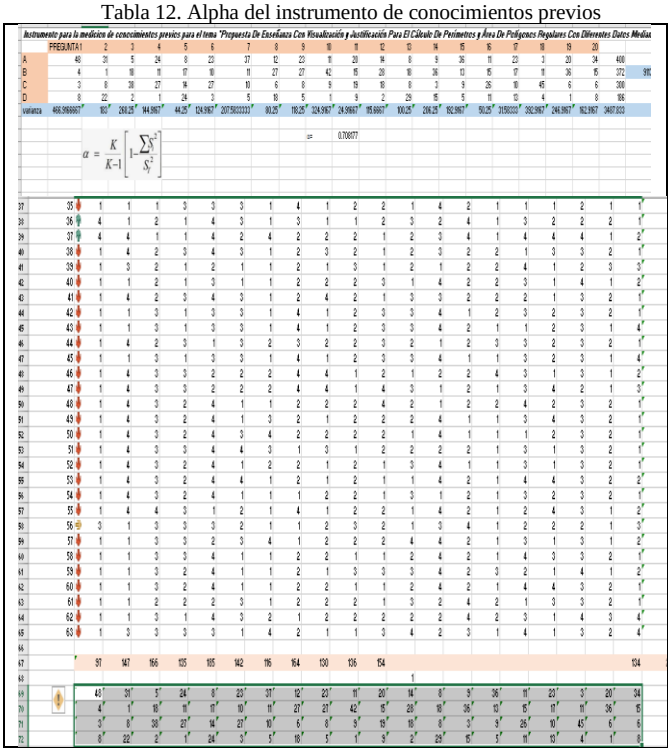
© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

19. Se calcula sumando las medidas de las longitudes de los lados en una figura.
    a) Área
    b) Perímetro
    c) Longitud
    d) Superficie.

20. Es todo el espacio que queda encerrado entre los límites de esa figura.
    a) Área
    b) Perímetro
    c) Longitud
    d) Superficie.

El instrumento arrojó un Alpha de 0.70817746, como se muestra en la tabla 12.

Tabla 12. Alpha del instrumento de conocimientos previos



Para conocer los conocimientos adquiridos durante la secuencia didáctica se realizó la siguiente prueba final descrita en la tabla 13.

Tabla 13. Instrumento de prueba final

Nombre: _____
Grado: _____ Grupo: _____

1. ¿Qué es una figura regular?
    a) Polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales.
    b) Polígono cuyos lados son iguales pero sus ángulos interiores no.
    c) Polígono cuyos lados y ángulos interiores y exteriores son congruentes.
    d) Todas las anteriores.

2. ¿Cuáles de las siguientes opciones son figuras regulares?
    a) Cuadrado, rectángulo, circulo, trapecio y romboide.
    b) Trapecio rectángulo, triángulo isósceles, rombo y cuadrado
    c) Triángulo Equilátero, cuadrado y hexágono.
    d) Todas las anteriores.

3. ¿Los polígonos regulares pueden inscribirse en una circunferencia?
    a) Si, la circunferencia circunscrita pasa por todos sus puntos de la figura.
    b) No, la circunferencia circunscrita no pasa por todos los puntos de la figura.
    c) Solo algunas figuras.
    d) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Cuáles son los elementos que componen a una figura regular?
    a) Vértice, lado, centro y diagonal.
    b) Lado, radio, centro, vértice y apotema.
    c) Vértice, lado, centro, radio, apotema y diagonal.
    d) Todas las anteriores.

5. ¿Cuál es la fórmula para encontrar el número de diagonales dentro de una figura regular?
    a) $D = \frac{n(n-3)}{2}$
    b) $D = \frac{(n-3)}{2}$
    c) $D = n - 3$
    d) Ninguna de las anteriores

6. ¿Cuál es la fórmula para saber cuánto miden los ángulos interiores de una figura regular?
    a) $angulo\ interior = \frac{(n-2)x180°}{n}$
    b) $angulo\ interior = \frac{(n-2)x180°}{2}$
    c) $angulo\ interior = \frac{(n-2)x90°}{n}$
    d) Ninguna de las anteriores

7. ¿Qué es el perímetro?
    a) Línea o conjunto de líneas que forman el contorno de una superficie o una figura.
    b) Contorno de una superficie o de una figura y a la medida de ese contorno.
    c) Es la frontera de la figura geométrica
    d) Todas las anteriores.

8. ¿cómo se calcula el perímetro de una figura geométrica?
    a) Sumando el valor de cada uno de sus lados.
    b) Es la suma de las longitudes de todos sus lados.
    c) Ni una de las anteriores.
    d) Todas las anteriores excepto C.

9. Si tengo una figura regular ¿cuál es la manera más sencilla de obtener su perímetro?
    a) Sumando el valor de cada lado.
    b) Multiplicando el valor de un lado por el número de lados.
    c) Multiplicando el valor de un lado por el número de lados dividiéndolo entre 2.
    d) Ninguna de las anteriores.

10. ¿Qué es el área?
    a) Cierta superficie que está marcada por límites.
    b) Es la extensión que podría presentar una figura geométrica.
    c) El Área (unidad de medida) es utilizada para definir determinado tamaño en el tiempo, y el espacio.
    d) Todas las anteriores.

11. ¿Cómo se calcula el área de una figura geométrica?
    a) Existen distintas fórmulas para calcular el área de las diferentes figuras.
    b) Existen una sola fórmula para calcular el área de las diferentes figuras.
    c) Multiplicando la base y la altura de la figura.
    d) Ninguna de las anteriores.

12. Si tengo una figura regular ¿cuál es la manera de obtener su área?
    a) Multiplicando perímetro por apotema entre 2.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

b) Existen distintas fórmulas para calcular el área de las diferentes figuras regulares.
c) Numero de lados por el valor de un lado por la apotema entre 2.
d) Ninguna de las anteriores.

El instrumento arrojó un Alpha de 0.941235, como se muestra en la tabla 14.

Tabla 14. Alpha del instrumento de conocimientos finales

Instrumento para la medicion de conocimientos para el tema "Propuesta de enseñanza con visualización y justificación para el cálculo de perímetros y área de poligonos regulares con diferentes datos

	PREGUNTA 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
A	28	26	27	18	13	15	25	25	20	17	19	19	252	
B	11	13	18	17	25	28	18	19	21	15	13	14	212	5714.66
C	13	16	9	12	16	12	4	1	11	18	24	18	154	
D	6	3	4	11	4	3	11	13	6	8	2	7	78	
varianza	89.66666667	89.6666667	103	12.3333333	75	107	81.66666667	105	52.3333333	20.3333333	89.6666667	29.6666667	855.333333	

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left[1-\frac{\sum S_i^2}{S_T^2}\right]$$

α= 0.94123574

32	1	1	1	3	2	2	2	1	1	1	1	3	19
33	1	1	3	2	2	3	2	2	1	2	1	3	23
34	1	2	1	4	3	1	1	2	1	1	1	1	19
35	3	3	2	4	3	3	1	1	2	2	3	3	30
36	3	1	1	1	1	3	1	2	3	2	3	2	23
37	4	1	4	1	2	3	1	1	2	3	3	1	26
38	1	2	1	1	3	2	2	2	2	1	1	2	20
39	3	2	1	2	2	3	3	1	2	3	3	2	27
40	2	3	1	3	3	2	1	2	3	3	2	1	26
41	1	4	3	4	2	3	2	4	1	1	3	1	29
42	1	3	1	2	2	2	4	4	2	4	1	3	29
43	2	4	2	2	4	4	4	4	3	4	1	2	36
44	3	3	3	2	3	1	4	4	3	4	3	3	36
45	2	3	1	1	1	2	1	2	2	3	3	1	22
46	1	1	3	3	2	2	3	1	2	2	3	2	25
47	3	1	1	1	2	1	1	4	1	3	3	1	22
48	3	2	4	1	1	2	2	1	4	4	3	2	29
49	1	1	2	3	2	1	1	1	1	2	3	1	19
50	1	1	2	1	3	2	2	4	4	2	2	3	27
51	1	1	1	4	1	1	2	1	3	4	3	1	23
52	3	2	1	1	2	1	1	1	1	2	3	1	19
53	3	3	2	4	2	2	2	1	3	1	2	2	27
54	1	2	1	3	4	2	2	1	3	4	2	3	28
55	1	3	1	3	2	1	1	4	2	3	4	2	27
56	1	3	2	2	2	1	1	1	2	3	2	1	21
57	1	1	1	4	2	2	1	2	1	1	3	4	23
58	1	1	2	3	1	2	1	2	2	1	3	4	23
	114	114	109	136	132	125	124	126	128	143	136	141	1450
	28	26	27	18	13	15	25	25	20	17	19	19	
	11	13	18	17	25	28	18	19	21	15	13	14	
	13	16	9	12	16	12	4	1	11	18	24	18	
	6	3	4	11	4	3	11	13	6	8	2	7	

En la tabla 15 se realiza la correlación de las preguntas del examen final junto con el diagnóstico para poder realizar una comparación por reactivo e identificar los conocimientos adquiridos.

Tabla 15. Correlación.

CORRELACIÓN ENTRE PREGUNTAS			
# Examen Final	Conocimientos	# Examen Diagnóstico	Conocimientos
1	Definición de una fig. regular	1,2,5,13	Definiciones, elementos y características de una figura geométrica
2	Identificación de figuras regulares.	3,4,16	Características de una figura geométrica.
3	Construcción y trazo de figuras dentro de una circunferencia.	4,7	Características del círculo y figuras regulares.
4	Características de figuras regulares.	4,5,6,8,17	Conceptos y características de figuras geométricas.
5	Identificación de fórmulas.	8	Trazos dentro de una figura geométrica.
6	Identificación de fórmulas.	5, 6, 9,18	Identificación y cálculo de ángulos dentro de una figura geométrica.
7	Definición de perímetro.	2, 11,12	Identificación de los lados de una fig. geométrica
8	Cálculo de perímetro.	2,14,19	Elementos de las fórmulas para el cálculo del perímetro
9	Cálculo de perímetro.	2 14, 19	Características de una fig. Geométrica.
10	Definición de área	10, 15, 20	Cálculo de área de diferente fig. geométricas
11	Cálculo de área	10, 15, 20	Elementos necesarios para el cálculo de área de distintas fig. geométricas
12	Cálculo de área	10, 15, 20	Elementos necesarios para el cálculo de área de distintas fig. geométricas

En la figura 9 y 10 se muestran las distribuciones de los alumnos por reactivo tanto como en la prueba diagnóstica y la prueba final. La diferencia de cada rango se muestra a continuación.

1. La diferencia de porcentajes en el nivel excelente es de 17%.
2. La diferencia de porcentajes en el nivel adecuado es de 3%
3. La diferencia de porcentaje en el nivel mejorable es de 8%

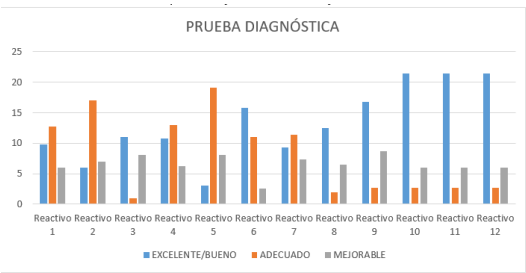


Figura 9. Distribución prueba diagnóstica

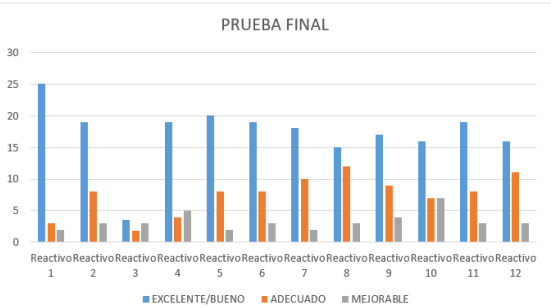


Figura 10. Comparativo de las pruebas por reactivo

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

En la actualidad la tecnología se ha vuelto una herramienta principal para la vida diaria de los adolescentes como lo son los dispositivos móviles y computadoras, por lo que al diseñar una propuesta didáctica holográfica en un grupo de 2° grado en la escuela secundaria "República de Filipinas" No. 87; esta permitió que los alumnos tuvieran interés ante la clase y su participación fuera más activa, logrando el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema justificaciones del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares, obteniendo un avance significativo en los conocimientos en un 17% del área de geometría acorde a la taxonomía de Bloom (1956)[22], en donde se aprecia que los alumnos en la primera sesión se encuentran dispersos en los niveles mejorable y adecuado mientras que en la séptima sesión más de la mitad de los alumnos se encuentra disperso en el nivel excelente/bueno.

Al utilizar los hologramas dentro del aula donde la proyección utilizada fue una pirámide trapezoidal construida con acetatos los cuales se colocaban en el centro de una pantalla conteniendo polígonos regulares en una presentación Power Point construida por sus elementos segmentados en Paint; esta permitió que la enseñanza del contenido "Justificación del cálculo de perímetros y áreas de figuras regulares" fuera atractiva e interesante ya que todos los alumnos tuvieron la oportunidad de interactuar con el holograma pese a las malas condiciones de iluminación del salón, ya que en la actualidad la realidad aumentada aun no es muy aplicada en la educación, obteniendo un incremento en su actitud hacia el estudio de las matemáticas donde el 47% de ellos al finalizar la aplicación de la propuesta muestran una actitud positiva, lo que representa un incremento del 23% en el grupo .

Al enseñar el tema justificación del cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares (SEP, 2017) [21] mediante distintos recursos didácticos como fueron los hologramas, GeoGebra y juego geométrico; éstos lograron que los alumnos tuvieran un aprendizaje significativo correspondiente al contenido, así mismo se fomentaron los propósitos del nivel y enfoque didáctico de la asignatura con un incremento del 23% de actitudes hacia el estudio de las matemáticas.

V. Propuesta didáctica para el cálculo de volumen de prismas desarrollando y aplicando fórmulas mediante realidad aumentada en 1er grado

La presente investigación que se realiza posee una evaluación cualitativo y descriptivo, por medio este alcance se pretende la descripción de un fenómeno o grupo, en este caso los grupos de la escuela secundaria general No.221 "Tlacaelel" tomando como fenómeno como los conocimientos, habilidades actitudes y movilización en competencias para poder resolver diversas situaciones de cuerpos geométricos basados en las propuestas de Euclides [23].

Para poder analizar otra de las características más importantes de los alumnos que es la forma en que aprende cada uno de ellos se aplicó un test de Estilos de Aprendizaje, tomando el instrumento de medición de estilos de aprendizaje de la Programación Neurolingüística de Bladeer y Grinder (1988) [6]; el cual se aplicó en grupos de primer grado de secundaria, este test cuenta con un Alpha de Cronbach de 0.890 y gracias a la aplicación de este test pudimos observar que estilo de aprendizaje predominaba en nuestros alumnos; kinestésico con un 45.83%, posteriormente el visual con 34.72% y finalmente el auditivo con 19.44%.

También para poder conocer quiénes son los líderes y alumnos que lamentablemente son rechazados de los grupos de clase se implementó un estudio de sociograma (Cheng, Chang, He y Liu, 2005)[24] el cual tiene un Alpha de Cronbach de 0.97; los resultados permiten saber cómo podemos hacer una distribución adecuada de los alumnos de nuestro salón de clases, también para saber de qué manera podemos hacer que nuestros alumnos sean más solidarios entre ellos mismos.

Así como los test anteriores son importantes, también es necesario conocer si a nuestros alumnos les causa interés el hecho de estudiar matemáticas o no, por lo que se aplicó un test de estudio hacía las matemáticas de Dorinda Mato (2010) [7], presentando un Alpha de Cronbach de 0.97 y permitió saber que el 76.68% de los alumnos considera que las matemáticas son importantes para la vida diaria, también se aplicó un test que nos permitiera medir que tan importantes son los valores para nuestros alumnos utilizamos el de Suárez (2010)[9], los cuales están divididos en tres categorías y cada categoría cuenta con un Alpha de Cronbach diferente; valores personales y sociales con un 0.89 y los individualistas con un 0.80. En el grupo se registraron los siguientes resultados los valores personales predominan con e 48%, los sociales con un 40.54% y los individualistas con un 10.80%.

Otro punto que es de suma importancia y es el contexto socioeconómico ya que es un factor que influye directamente en los alumnos para poder completar con su aprendizaje, se aplicó el test "Evaluación del nivel socioeconómico" (Romero, 2012)[8] que cuenta con un Alpha de Cronbach de 0.9017 y nos permitió saber que en los grupos d secundaria la mayoría de los alumnos se encuentran en el nivel socioeconómico B categoría media con un 75%, seguido del nivel C bajo superior con 15% y finalmente nivel B bajo inferior con un 10%.

La secuencia didáctica se realizó con ayuda de materiales concretos y de materiales que se podían visualizar de manera virtual y en tercera dimensión para transitar de acuerdo con el modelo de Van Hiele [25] con ayuda de un dispositivo móvil. Lo primero que se realizó fue un cubo flexible hecho con popotillos e hilo cáñamo, en el cual los niños interactuaron con el cubo ya terminado y tenían que ver la manera de poder construir otras figuras que también se podían ver en 3D, también se realizó el desarrollo plano de algunos prismas regulares y posteriormente se procedió a que los alumnos realizarán sus propios prismas creando una maqueta la cual decoraron a su gusto y finalmente se hizo el uso de la aplicación Scope, donde ellos podían observar en 3D el trabajo que se realizó en otra aplicación que se llama Creator, como se muestra en la figura 11.

Para poder realizar una secuencia didáctica que ayude para lograr los aprendizajes esperados, es necesario hacer una prueba diagnóstica como la que se presenta a continuación, como se muestra en la tabla 16.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

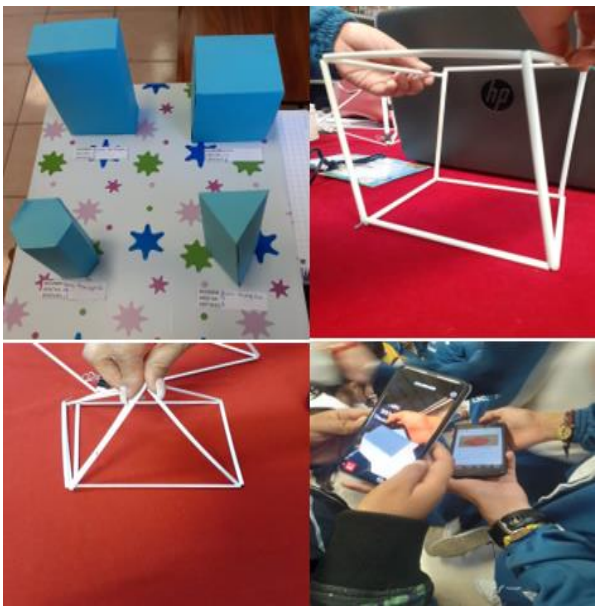


Figura 11. Diseño de cuerpos geométricos y APP SCOPE diseñada en Creator.

Tabla 16. Examen diagnóstico.

EXAMEN DIÁGNOSTICO
NOMBRE DEL ALUMNO: _____
GRADO: __ GRUPO: ___

1.- ¿Qué es una figura geométrica?
a) Son las representaciones planas con determinado número de lados
b) Punto en el que coinciden dos lados de un polígono
c) Líneas que limitan un polígono
d) Dimensión vertical de un cuerpo en su posición natural o normal.

2.-Es el triángulo que tiene sus 3 lados iguales
a) Isósceles
b) Equilátero
c) Escaleno
d) Rectángulo

3.- Triángulo que tiene dos lados iguales y uno diferente
a) Isósceles
b) Equilátero
c) Escaleno
d) Rectángulo

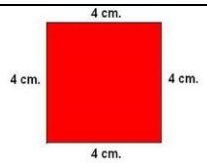
4.- Triángulo que tiene todos sus lados diferentes
a) Equilátero
b) Escaleno
c) Isósceles
d) Rectángulo

5.- Punto en el que coinciden dos o más aristas
a) aristas
b) vértice
c) lado
d) base

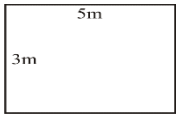
6.- Línea donde 2 superficies se encuentran
a) vértice
b) arista
c) cuadrado
d) Figura

7.- Es una figura que tiene todos sus lados iguales, también sus ángulos internos son iguales
a) Rectángulo
b) Polígono regular
c) Polígono irregular
d) Triángulo rectángulo

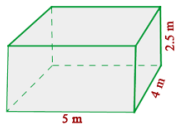
8.- Calcula el perímetro de la siguiente figura
a) 34 cm
b) 25 cm
c) 16 cm
d) 20 cm



9.- Calcula el área del siguiente rectángulo
a) 18 cm^2
b) 16 cm^2
c) 15 cm^2
d) 34 cm^2

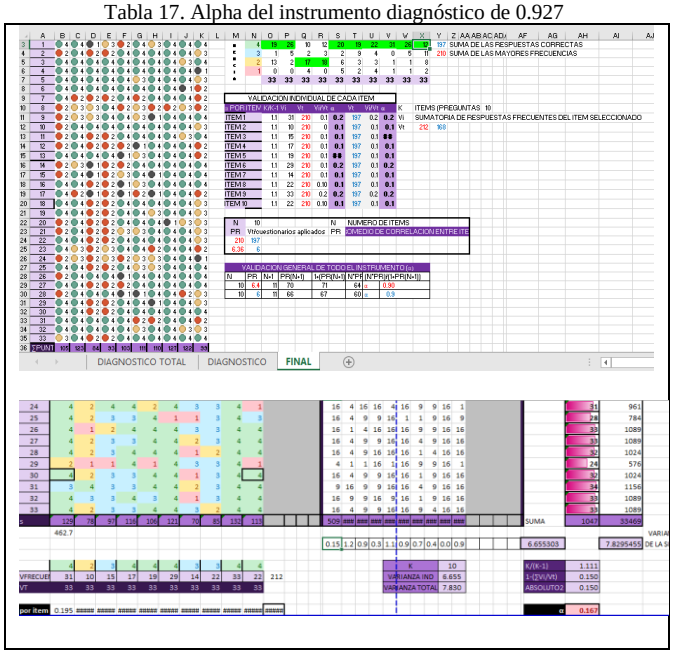


10.- Obtiene el volumen de la siguiente figura
a) 50 cm^3
b) 43 cm^3
c) 50 cm^2
d) 75 cm^2



El instrumento anterior brindó un Alpha de 0.927, como se muestra en la tabla 17.

Tabla 17. Alpha del instrumento diagnóstico de 0.927



Para saber si los aprendizajes esperados se lograron es necesario aplicar una prueba final la cual ayude a comprobar si la secuencia resulto favorable o no, como se describe en la tabla 18.

Tabla 18. Examen final

EXAMEN CORRESPONDIENTE AL TEMA DE VOLUMEN DE PRISMAS
NOMBRE DEL ALUMNO: _____
GRADO: _____ GRUPO: _____

1.- Es una figura compuesta por 3 líneas o más, que crean una figura cerrada.
a) Polígono
b) Círculo
c) Ángulo
d) Pentágono

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

2.- Es aquella figura geométrica que tiene todos sus lados y sus ángulos internos iguales.
a) Polígono irregular
b) Rectángulo
c) Polígono regular
d) Triángulo rectángulo

3.- Es la suma de todas las longitudes de los lados del polígono.
a) Área
b) Perímetro
c) Volumen
d) Superficie

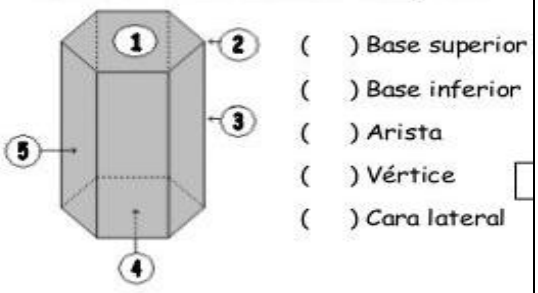
4.- Medida de la superficie que cubre un cuerpo o figura geométrica
a) Área
b) Perímetro
c) Volumen
d) Masa

5.- Es una medida que calcula el espacio que ocupa un cuerpo geométrico en tres dimensiones.
a) Área
b) Volumen
c) Perímetro
d) Masa

6.- Tienen dos caras paralelas e iguales, llamadas bases, el resto de sus caras son paralelogramos.
a) Pirámides
b) Prismas
c) Cilindro
d) Cuadrilátero

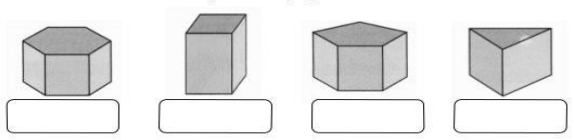
7.- Es un prisma regular cuando…
a) sus bases son polígonos irregulares
b) Sus bases son polígonos regulares
c) Cuando termina en vértice o punta
d) Cuando sus caras laterales no son perpendiculares a la base

8.- Localiza cada elemento del prisma en el orden correcto



a) 5, 2, 3, 4, 1
b) 3, 4, 1, 5, 2
c) 1, 4, 3, 2, 5
d) 1, 2, 3, 4, 5

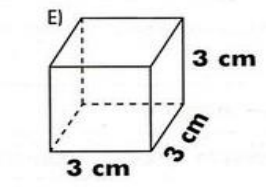
9.- Relaciona cada número con la letra correspondiente y selecciona el inciso con el orden correcto
1) 2) 3) 4) A) Prisma triangular
B) Prisma rectangular



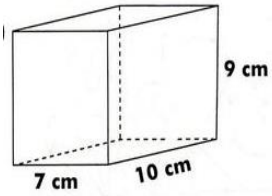
C) Prisma pentagonal
D)Prisma hexagonal

a) 1A, 2B, 3C, 4D
b) 1C, 2B, 3A, 4D
c) 1D, 2B, 3C, 4A
d) 1C, 2A, 3D, 4B

10.- Calcula el volumen de las siguientes figuras y selecciona el inciso con el resultado correcto
a) 9 cm^3
b) 24 cm^3
c) 27 cm^3
d) 48 cm^3

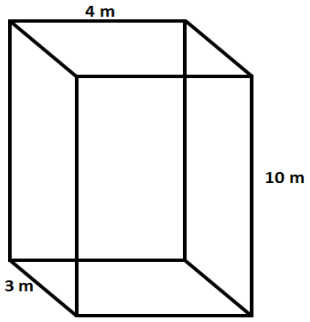


11.- Calcula el volumen de la siguiente figura



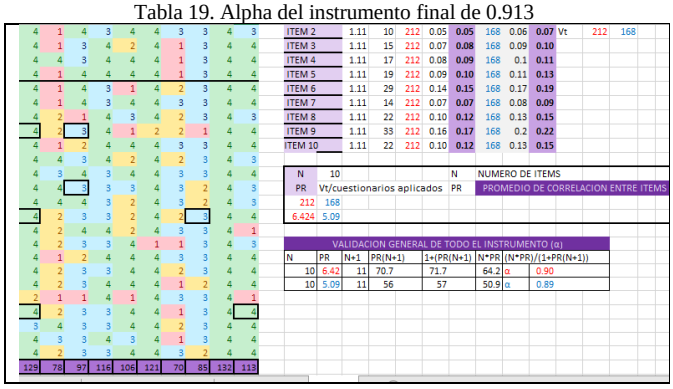
a) 26 cm^3
b) 62 500 cm^3
c) 630 cm^3
d) 630.5 cm^3

12.- Calcula el volumen de la siguiente figura
a) 120 cm^3
b) 17 cm^3
c) 35 cm^3
d) 34 cm^3

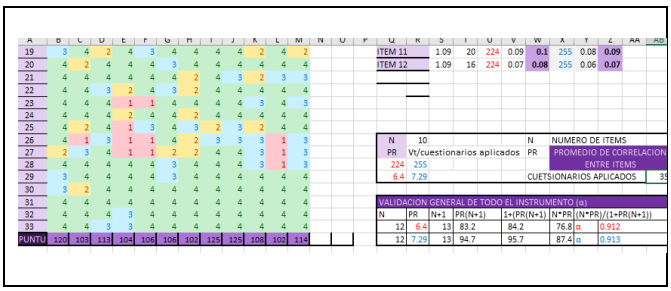


El instrumento anterior brindó un Alpha de 0.913, como se muestra en la tabla 19

Tabla 19. Alpha del instrumento final de 0.913



| | | |



Para lograr una comparación se desarrolló una correlación de ítems como se describe en la tabla 20.

Tabla 20. Correlación de exámenes.

CONOCIMIEN-TOS	EXAMEN FINAL	CONOCIMIEN-TOS	EXAMEN DIAGNÓS-TICO
Definición de polígono	1 y 2	**Definición de figura geométrica**	1
Descripción de unidades de medida	3, 4 y 5	**identificación de los tipos de triángulos**	2, 3 y 4
Definición de prismas	6 y 7	**identificación de elementos de un polígono**	5, 6 y 7
Identificación de elementos de un prisma	8 y 9		
Cálculo de volumen	10, 11 y 12	**Cálculo de perímetro, área y volumen**	8, 9 y 10

En la figura 12 se observa la diferencia que hubo en la prueba diagnóstica donde solamente se calificó con 2 niveles y en la final en 4 niveles finalmente se aprecia la diferencia que hubo entre cada una de las pruebas.

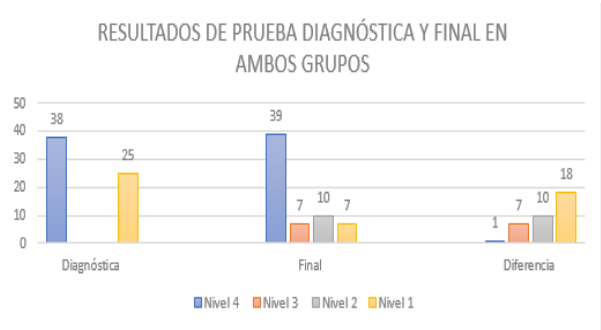


Figura 12. Resultados

Al aplicar una actividad diferente a las acostumbradas por los alumnos de 1er grado de la escuela secundaria 221 “Tlacaelel” en la cual pueden tener contacto físico con sus propias creaciones, así como otras actividades en las cuales los alumnos pueden observar detalladamente algunos productos que tengan forma de prisma, desde envases de perfume, chocolates, recipientes entre otros, así como también la construcción para obtener sus propios prismas fabricados por ellos mismos con ayuda de una plantilla y finalmente que tengan interacción con la tecnología que en este caso fueron figuras que podían visualizar mediante realidad aumentada en SCOPE haciendo uso de un dispositivo móvil, computadora o tableta; los alumnos pudieron calcular el volumen de prismas desarrollando y aplicando fórmulas de forma atractiva para ellos, puesto que la mayoría de los alumnos son kinestésicos.

Al diseñar una o varias actividades como realizar un cubo con popotillos de café e hilo cáñamo, los niños tenían interacción con los materiales, mismos que pudieron movilizar a su gusto para poder encontrar las otras figuras que tenían que obtener como un tetraedro en tercera dimensión, podemos ir observando si nuestros alumnos están alcanzando los aprendizajes esperados ya que se trata de convencerlos que los prismas están a nuestro alrededor diariamente, presentes en cajas de medicinas o cajas que tengan forma de algún prisma regular, botellas de agua entre otros, una vez que se ha logrado identificar que nuestros alumnos ya conocen el desarrollo plano de un prisma regular podemos invitarlos a que fabriquen sus propios prismas dibujando, recortando y pegando, finalmente se va acercando al día de la prueba y se finaliza el tema con el uso de la tecnología, donde podemos ver que se impresionaron mucho por el hecho de que ahora puedan utilizarla a favor de la educación.

Al realizar actividades como desarmar cuerpos geométricos para poder ver su desarrollo plano se pudo observar que los alumnos obtuvieron una mejor perspectiva, esto lo pudimos observar de mejor manera cuando los chicos realizaron la evaluación diagnóstica que consistía en 10 preguntas y la mayoría de los alumnos confundían los elementos de un prisma posteriormente se llevó a cabo la implementación de la secuencia didáctica como se muestra en el apartado 4 donde los alumnos podían interactuar de manera física con los cuerpos geométricos, gracias a esto los resultados arrojaron que hubo un incremento en su aprendizaje sobre los prismas con el 1.59% ya que en la prueba final tenían que responder a 13 preguntas en las que debían poner a prueba lo aprendido durante la secuencia didáctica.

VI. Propuesta didáctica para la formulación, justificación y uso del teorema de Pitágoras mediante el método Singapur en grupos de 3er grado

La propuesta se llevó a cabo en la escuela Secundaria Diurna No 207 “Estado de Israel” ubicada en Hacienda Clavería S/N en la colonia prados del Rosario con Código Postal 02410 en la Delegación Azcapotzalco. La propuesta didáctica se aplicó a dos grupos de tercer grado (64 alumnos) donde se empleó un instrumento para identificar el estilo de aprendizaje (VAK) de cada estudiante, utilizando el modelo de Programación Neurolingüística de Ralph Metts S. J., (1999) [4], los resultados arrojados son los siguientes: el aprendizaje kinestésico es de 45%, el 35% es auditivo y el 20% es visual.

Para elaborar la secuencia didáctica en congruencia a las necesidades de los educandos se optó por utilizar el método singapur ya que para Rodríguez (2011) [26], esta metodología aplica diferentes tipos de actividades que permite al profesor tener mejores logros con un mejor aprendizaje, así como actividades investigativas en forma atractiva, juegos con un material concreto en donde el aprender matemática será algo más que cognitivo “aprenderá Jugando”. La metodología de Singapur plantea realizar actividades utilizando material concreto, pictórico y abstracto.

La secuencia didáctica consta de seis sesiones y una extra para la evaluación. En la primera sesión los alumnos identificaron a Pitágoras, escribiendo una pequeña parte de su vida en su cuaderno y pegaron una imagen de este en su

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

cuaderno, posterior a ello se llevó a cabo la siguiente actividad que consistía en resolver un problema utilizando material recortable que pudieran manipular, para finalizar se demostró el teorema de Pitágoras con ayuda de hojas de color. Para la segunda sesión se hizo uso del rompecabezas para resolver una pregunta estos rompecabezas fueron elegidos por ser demostraciones de autores como Anaricio Góspel, Liu hui, Bhaskara, un autor desconocido y el Tangram chino, con la finalidad de que el alumno comprenda que está resolviendo.

Para la tercera sesión se utilizaron ejercicios donde tenían que obtener la medida de la hipotenusa o alguno de los catetos, según visualizará en la imagen para ello era necesario utilizar el teorema de Pitágoras. En la cuarta sesión se utilizaron imágenes para ayudar al alumno a resolver problemas ya que visualizan lo que se les pedía. Para la quinta y sexta sesión se dictaron problemas que debían resolver los alumnos solo utilizando la fórmula que se deriva del teorema de Pitágoras, como se describe en la figura 13.

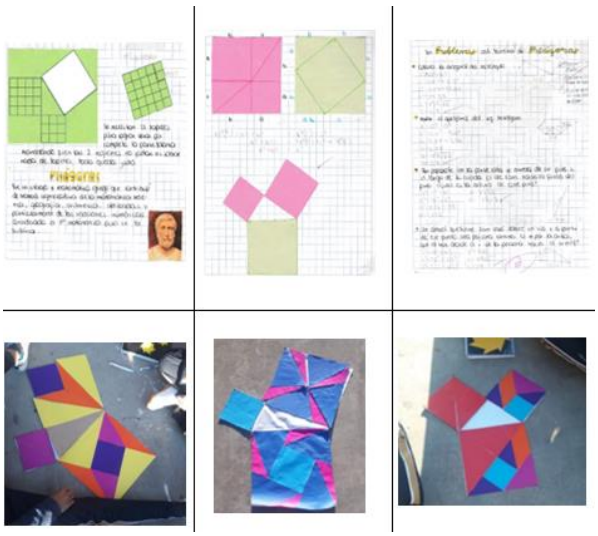


Figura 13 Secuencia didáctica.

Se elaboraron dos pruebas una diagnostica, descrita en la tabla 21 y una prueba final en la tabla 23 para obtener resultados antes y después de aplicar la secuencia didáctica, para ello dichos instrumentos se aplicaron a 40 alumnos de distintas escuelas para obtener la confiabilidad de estos. En ambas pruebas la fiabilidad (Alpha Cronbach) es de 0.98, como se muestra en la tabla 22 y 24 y estas se encuentran relacionadas como se muestra en la tabla 25.

Tabla 21. Prueba diagnóstica

Prueba diagnóstica

Nombre:_____ Grado: _____ Grupo:

INSTRUCCIONES: Subraya la respuesta que creas correcta en cada pregunta.

1. ¿Qué es un ángulo?

a) Un ángulo se genera por dos rectas fijas que se cortan en un punto.
b) Un ángulo puede ser interno o externo.
c) Un ángulo se genera por dos lados.
d) Un ángulo es la abertura que se genera por dos rectas fijas que se cortan en un punto.

2. ¿Cuáles son los tipos de ángulos que conoces según su abertura?

a) Agudo, recto, obtuso, consecutivo, adyacente, opuesto por el vértice.
b) Agudo, recto, obtuso, llano, cóncavo y completo.
c) Recto, obtuso, llano, adyacente y opuesto por el vértice.
d) Recto, obtuso, llano, adyacente y completo

3. Un ángulo recto es:

a) Un ángulo de 45 grados
b) Un ángulo de 90 grados
c) Un ángulo de 180 grados
d) Un ángulo de 360 grados

4. La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es de:

a) 160°
b) 190°
c) 180°
d) 200°

5. Un triángulo es:

a) Una figura plana de tres lados y tres vértices.
b) Una figura plana con un ángulo recto.
c) Figura formada por tres vértices.
d) Figura geométrica de tres lados y tres ángulos.

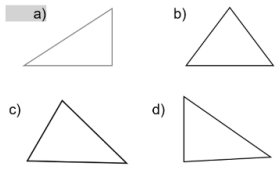
6. Los triángulos se clasifican según sus lados y ángulos los cuáles son:

a) Equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, recto y obtusángulo.
b) Equilátero, isósceles, escaleno, adyacente, recto y obtusángulo.
c) Equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, recto y completo.
d) Equilátero, isósceles, escaleno, acutángulo, llano y obtusángulo.

7. ¿Qué elementos conforman a un triángulo?

a) Ángulos, vértices, diagonal y lados.
b) Vértice, ángulo interno, ángulo externo y lados.
c) Ángulo interno, ángulo externo y diagonal.
d) Vértice, ángulo interno y ángulo externo.

8. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo rectángulo?



9. Cuál de los siguientes tríos de ángulos pueden ser las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.

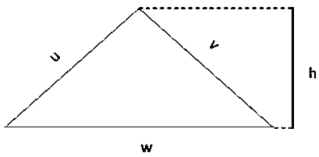
a) 65°, 85° y 30°
b) 75°, 75° y 40°
c) 27°, 35° y 119°
d) 25°, 59° y 92°

10. Si las medidas de un triángulo son de 5cm, 4cm, 3cm y tiene un ángulo de 90° ¿Qué triángulo se forma?

a) Isósceles-rectángulo
b) Rectángulo-isósceles
c) Equilátero-acutángulo
d) Escaleno-rectángulo

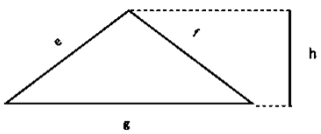
11. Del triángulo mostrado a continuación, ¿Qué fórmula utilizarías para hallar su perímetro?

a) $p = u + v + w$
b) $p = (u + v)w$
c) $p = v + w - u$
d) $p = \frac{(a)(c)}{2}$



© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

12. Del triángulo mostrado a continuación, ¿Qué fórmula utilizarías para encontrar su área?

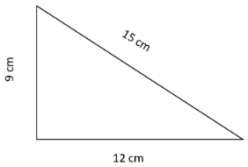


a) $a = (e + g)f$
b) $a = e + g + f$
c) $a = e + f - g$
d) $a = \frac{(g)(h)}{2}$

13. El perímetro de un triángulo rectángulo es igual a 24 cm, si uno de sus lados mide 10cm y los otros lados son iguales ¿Cuál es la longitud de estos?

a) 7.5cm y 7.5 cm
b) 5 cm y 8 cm
c) 7 cm y 7 cm
d) 6 cm y 6 cm

14. Encuentra el área del siguiente triángulo rectángulo.



a) 55 cm^2
b) 53 cm^2
c) 108 cm^2
d) 54 cm^2

Tabla 22. Alpha de 0.98 en prueba diagnóstica

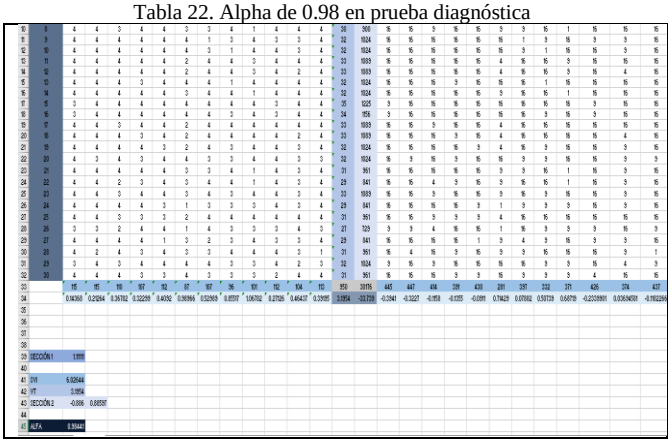


Tabla 23. Prueba final

Prueba final

Nombre:_____ Grado: _____ Grupo:

INSTRUCCIONES: Subraya la respuesta que creas correcta en cada pregunta.

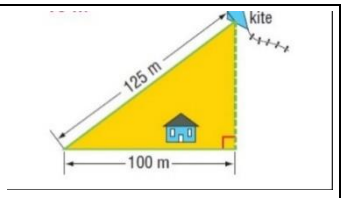
1. ¿Qué es un triángulo rectángulo?
a) Una figura plana de tres lados que tiene un ángulo de 90°.
b) Figura plana de tres lados y tres vértices.
c) Figura plana con un ángulo recto.
d) Polígono de tres lados y tres vértices.

2. ¿Qué elementos conforman al triangulo rectángulo?
a) Cateto a, hipotenusa, ángulo de 90° y cateto b.
b) Diagonal, lados, ángulo de 90° e hipotenusa.
c) Mediana, catetos, diagonal e hipotenusa.
d) Catetos, lados, ángulo de 90° y la mediana.

3. Si se sabe que uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 27°, entonces cuanto medirán los dos ángulos restantes.

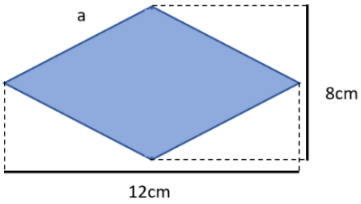
a) 90° y 63°
b) 70° y 83°
c) 73° y 90°
d) 93° y 60°

4. Cuál de las siguientes palabras completan el siguiente enunciado.
El teorema de Pitágoras establece que:
La suma de los_____de las longitudes de los es igual cuadrado de la longitud de la



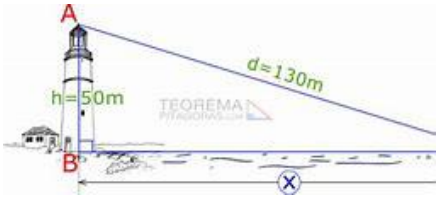
a) Cuadrados, catetos e hipotenusa
b) Cubos, lados e hipotenusa
c) Cuadrados, lados y diagonal
d) Cubos, catetos e hipotenusa

5. Del triángulo mostrado a continuación, ¿Qué formula utilizarías para encontrar la longitud de la hipotenusa?

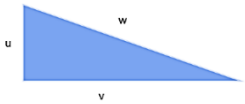


a) $w^2 = u^2 + v^2$
b) $w^2 = u + v$
c) $w^2 = v^2 + u$
d) $w = v + u$

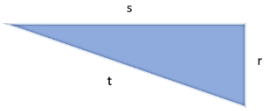
6. Del siguiente triángulo ¿Qué formula utilizarías para hallar la longitud de un cateto?



a) $t^2 = s^2 + r^2$
b) $r^2 - s = t$
c) $s^2 + r = t^2$
d) $s^2 = t^2 - r^2$



7. Un papalote está atado al suelo con un hilo de 125 metros de longitud. Cuando el hilo está totalmente tenso, la longitud del papalote adonde se encuentra atado de manera horizontal mide 100 metros ¿A qué altura está volando el papalote?



a) 75 m
b) 76 m
c) 74 m
d) 75.5 m

8. ¿En el siguiente rombo cual es el valor de a, sabiendo que su diagonal menor mide 8 cm y la diagonal mayor mide 12 cm?

a) 8 cm
b) 7.3 cm
c) 7.2111 cm
d) $2\sqrt{13}$ cm

9. Desde lo alto de un faro, cuya altura sobre el nivel del mar es de 50 m, se observa una embarcación a una distancia de 130 m, ¿A qué longitud de encuentra la embarcación del farol?

a) 20 m
b) 119 m
c) 121 m
d) $1\sqrt{120}$ m

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

10. ¿Cuánto mide la altura de la siguiente figura?

a) 4.9 u
b) $2\sqrt{6}\ u$
c) 5 u
d) 4.8989 u

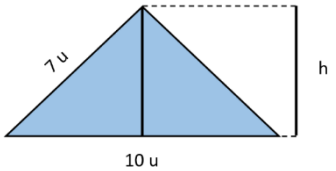
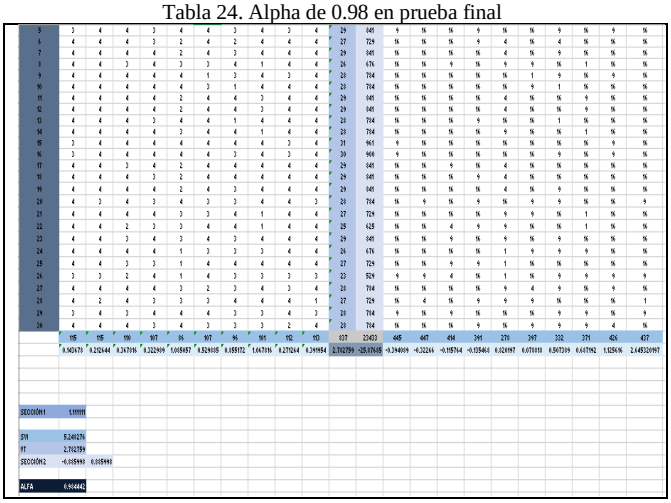


Tabla 24. Alpha de 0.98 en prueba final



Los resultados obtenidos posterior a la aplicación de la prueba se muestran en la figura 14. Al analizar los gráficos podemos reflexionar que hubo un avance notorio para el tema de formulación, justificación y uso del teorema de Pitágoras y los conocimientos previos de este.

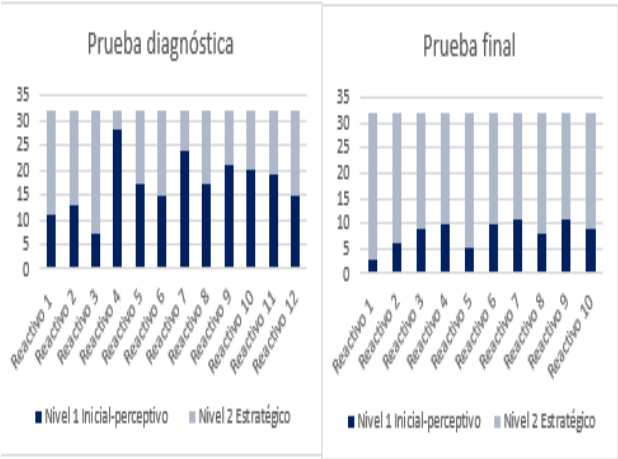


Figura 14. Resultados de las pruebas.

El Método Singapur es sin duda una buena estrategia para la enseñanza de las matemáticas, porque permite que el estudiante aprenda de manera más dinámica, ya que se basa en la resolución de problemas, promoviendo el desarrollo de habilidades matemáticas, por lo que al aplicar su metodología en el contenido formulación, justificación y uso del teorema de Pitágoras de acuerdo con los planes y programas (SEP,2017) [21] en alumnos de tercer grado de la escuela secundaria No 207 “Estado de Israel” los estudiante avanzaron de manera progresiva, se respetó el estado cognitivo de cada uno, pues los contenidos se introducen por nivel (desde lo más fácil a lo complejo), además, que para la introducción de conceptos se utiliza material concreto, luego se pasa a lo pictórico y finalmente a lo abstracto, esto logró un incremento del 22.5%, asimismo los grupos 3° “A” y 3° “F” mostraron interés al participar en las actividades ya que trataban de integrarse en estas, debido a que los estudiantes no estaban acostumbrados a trabajar de esta manera y menos en matemáticas, conforme avanzaban las clases se observó un progreso en la resolución de problemas ya que los alumnos trataban de plantear que datos necesitan para llegar al resultado, asimismo entendían para que se utilizaba el teorema de Pitágoras.

Para la formulación del teorema de Pitágoras se utilizó hojas de color donde se trazaron diferentes figuras que fueron recortadas para manipularlas, esto ayudo a que los alumnos comprendieran el conocimiento que se deseaba brindar logrando un mayor interés en esta actividad por parte del grupo de tercer F pues mostraban agrado y entusiasmo la realizarla; así mismo para su justificación se utilizó el rompecabezas, ya que a los alumnos les interesa este tipo de material para trabajar y comprenden mejor al visualizar y manipular este, por lo que hubo una mejor disposición por el grupo 3° "F" al igual que la actividad anterior, pues comentan que este tipo de material es de su agrado y esto puede ser justificado con los resultados arrojados al aplicar una prueba de estilos de aprendizaje (VAK) de Programación Neurolingüística de Ralph Metts S. J. (1990)[4] donde se obtuvo que en este grupo la mayoría son kinestésicos (56.3%), seguidos de los auditivos (25%) y por último visuales (18.7%), por lo que los materiales concretos lograron potencializar su aprendizaje para la formulación, justificación y uso del teorema de Pitágoras obteniendo un promedio general en la prueba final de 52.2 pts., ya que estos llaman su atención pues están acostumbrados a memorizar el contenido y esto a su vez limita su imaginación, además los rompecabezas ayudan a la concentración y al planteo de estrategias.

Las imágenes sirven de apoyo para la visualización de los problemas planteados ya que el alumno puede observar y colocar los datos que se proporcionan y cuales le hacen falta para resolverlo, los pictogramas ocupados en la propuesta fueron triángulos rectángulos, estos ayudaron a comprender y analizar el proceso que debía llevar para solucionar el ejercicio o problema en cuestión obteniendo un incremento de 22.5% en la prueba de conocimiento, observando que en el tercero A hubo una mejor aceptación por este material, en cambio en el tercero F los alumnos no utilizaban el material ya que con solo leer este concluían que estaban buscando y el procedimiento que debían utilizar, además de ser un grupo crítico y perceptivo ya que en el test de habilidades cognitivas se obtuvo un mayor porcentaje en cada una de las categorías descritas en el nivel 4, por lo que se recapitula que el uso de material pictórico es útil en la resolución de problemas en este caso fue el uso de imágenes pues eran los que se necesitaban para el contenido que se trabajó.

La metodología singapur ayuda al alumno en el proceso de enseñanza/aprendizaje, ya que se lleva por etapas, pero se necesita educar a los estudiantes a llevar a cabo las actividades que se plantean en cada etapa, ya que algunos no muestran interés por esta y solamente buscan aprobar la asignatura; a pesar de que hubo una mejora, se obtuvo un incremento del 22.5%%, y es que el proceso ya mencionado no solo debe ser para un contenido sino en general, debido a que varios contenidos son desconocidos para el alumno y no ayudan a seguir avanzando en su proceso.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

VII. Propuesta didáctica para calcular perímetro y área de figuras regulares desarrollando y aplicando fórmulas con material concreto y virtual en primero

En la Escuela Secundaria General No. 87 “Republica de Filipinas” ; el diseño e implementación de una propuesta didáctica, para la asignatura de matemáticas en primer grado, se selecciona un contenido especifico con base en los planes y programas de estudios (SEP, 2017)[21], la propuesta corresponde al tema de “Cálculo de perímetro y área, aplicando y desarrollando formulas” ; la elaboración del documento recepcional, en el se plasman los aspectos a investigar, los resultados obtenidos en diversos cuestionarios, el análisis de resultados y las conclusiones a partir de estos y de las experiencias en el trabajo docente.

Se formularon y diseñaron instrumentos validados, para diagnosticar y evaluar los conocimientos de los alumnos, antes y después de la aplicación de las secuencias. Así como el análisis de los resultados obtenidos.

El grupo está conformado por 22 estudiantes en total, 12 mujeres y 10 hombres.

Para conocer los estilos de aprendizaje presentes en el grupo, se aplicó un instrumento de medición de estilos de aprendizaje de la Programación Neurolingüística de Bandler y Grinder (1988) [6]; el cual cuenta con un Alpha de Cronbach de 0.890: al aplicarlo se determinan los siguientes valores 55% kinestésico, 27% auditivo y 18% visual. Así mismo se aplicó un test sociométrico, que permite identificar a los alumnos que son considerados líderes sociales y académicos, los subgrupos de estudiantes y la forma en que el grupo prefiere trabajar.

El tema fue implementado a través de material concreto, con el apoyo de medios virtuales, se realizó en el transcurso de las sesiones para la justificación de las fórmulas para la obtención de área y perímetro, las figuras geométricas deben ser manipulables como menciona Duval (1999)[11] las figuras geométricas deben ser construibles con ayuda de instrumentos para guiar los movimientos necesarios de construcción, así los alumnos en el proceso de construcción, identifican, proponen y adquieren el conocimiento implícitamente.

La propuesta didáctica corresponde al primer grado de secundaria, en la asignatura de matemáticas; de acuerdo con la SEP (2017) [21] se ubica en el bloque II, eje forma, espacio y medida, en el tema magnitudes y medidas. La intervención se desarrolló durante siete sesiones en el intervalo de tiempo del 17 al 25 de febrero de 2020.

La finalidad de esta propuesta es que los alumnos desarrollen los aprendizajes clave estipulados en el modelo educativo (2017) [21]; con el uso de material concreto y virtual como recursos didácticos y retomando como referente didáctico a Duval para la enseñanza del contenido.

La primera sesión de la secuencia didáctica, para el cálculo de perímetro de circulo y polígonos y áreas de triángulos y cuadriláteros, se enfocó en identificar los conceptos necesarios para desarrollar el algoritmo para obtener perímetro de polígonos; la clasificación de triángulos y de los cuadriláteros, donde se hacen diversas preguntas para que los alumnos indiquen lo que conocen de cada figura geométrica y argumenten sus respuestas.

Para evaluar los conocimientos obtenidos con la implementación de la propuesta didáctica se aplicó una prueba objetiva de conocimientos, fue diseñado y validado con un Alpha de Cronbach de 0.75, cuenta con 12 reactivos con respuestas de opción múltiple.

La segunda sesión se centró en la identificación de polígonos, las características y clasificación de los mismos, se hizo hincapié en que los polígonos no solo son figuras con más de 5 lados, sino cualquier figura geométrica plana delimitada por lados; se entregaron hojas de trabajo para que puedan reafirmar el conocimiento expuesto en la actividad anterior; finalmente se dictaron problemas donde se tenía que aplicar la fórmula para obtener el perímetro de distintas figuras, estas actividades eran necesarias para que los alumnos puedan establecer la relación de las fórmulas con la figura en menor escala.

En la tercera sesión se estableció con los alumnos los conceptos y unidades de medida que corresponde a el área, durante las sesiones se pide que los alumnos den primero sus conceptos y después se procede a explicar o aclarar dudas; se entregó una hoja de trabajo con triángulos y cuadriláteros que se utilizarían al justificar las fórmulas de para la obtención de área con el uso de material concreto. Los alumnos recortaron, manipularon y colorearon las figuras geométricas, de acuerdo con las indicaciones establecidas, de esta forma pudieron comprobar los elementos de los polígonos, las variables que se utilizan en cada figura y las diferencias entre cada cuadrilátero; se consideró que el grupo tiene alumnos visuales y auditivos por lo que el proceso de la justificación se describió para tenerlo plasmado en sus cuadernos. Por último, se les pidió que identificaran el valor y ubicación del perímetro y área de un rectángulo para formalizar el aprendizaje esperado.

La cuarta sesión estuvo centrada en la resolución de problemas de área, para formalizar los conocimientos de la sesión anterior, en el transcurso de la actividad se resolvieron las dudas que tuvieran, algunos casos que se presentaron fueron, que a los alumnos se les dificultaba identificar los datos que debían utilizar para obtener el resultado esperado, la formula correcta o las unidades de medida. En esta sesión se implementó la parte virtual, los alumnos deberán realizar un video en el cual expliquen la justificación de una figura geométrica, que se les asignara, la entrega se establece para la última sesión, con la finalidad de atraer la atención de los alumnos se le asigno el nombre de “Soy un youtubero ” a la actividad, se les entrega una hoja de trabajo donde se estipulan las características del trabajo y la cual se firma por las madres, padres o tutores, para que sea de su conocimiento el uso de material tecnológico en casa.

En la quinta sesión las actividades se centraron en el círculo, los elementos y la justificación de la fórmula para obtener el perímetro del mismo (circunferencia); primero se entregó una hoja de trabajo donde los alumnos identificaron los elementos que conocieran, después se agregaron los que faltaron por mencionar; la visualización de la circunferencia se basó en el uso del hilo para demostrar la razón que hay entre la circunferencia y el diámetro; los alumnos terminaron la sesión completando una tabla en la que debían obtener la circunferencia que le correspondía a la medida del diámetro expuesta en la misma.

Durante la sexta sesión se realizaron distintos problemas que correspondían al aprendizaje de la obtención del perímetro del círculo, también se pide a los alumnos que monitoreen el trabajo de sus compañeros, porque el grupo es sociable entre sí, la intervención de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje influye positivamente.

En la séptima sesión se hizo entrega de los videos y antes de empezar el examen los alumnos que entregaron sus trabajos

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

dieron una breve explicación del proceso de elaboración de su material, dando también una explicación de lo que entendieron y si este le había ayudado a resolver dudas o les había generado más incógnitas, como se muestra en la figura 15.

Figura 15. Videos de los alumnos Youtubers.

Como antecedente la propuesta didáctica para el cálculo de perímetro y área se diseñó e implemento un examen diagnóstico, como se muestra en la tabla 25 con un Alpha Cronbach de 0.78, conformado de 22 reactivos, que engloban los conocimientos necesarios para lograr el aprendizaje esperado, como se muestra en la tabla 26.

Tabla 25. Instrumento de evaluación diagnóstica

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y subraya la respuesta correcta.

1. Un polígono es …
- **a) Una figura geométrica formada por segmentos rectos (llamados lados) unidos de forma que encierran un área en el plano.**
- b) La región comprendida entre dos líneas paralelas.
- c) Figura que tiene volumen.
- d) Todas las anteriores.

2. ¿Cuál de las siguientes figuras geométricas es un polígono?
- a) Hexágono
- b) Cuadrado
- c) Triángulo
- **d) Todas las anteriores.**

3. ¿Qué es un triángulo?
- a) Figura geométrica de 5 o más lados.
- b) Línea curva cerrada.
- **c) Polígono formado por tres líneas rectas.**
- d) Ninguna de las anteriores.

4. De las siguientes figuras cuál es un cuadrilátero:
- a) Trapecio.
- b) Rectángulo.
- c) Cuadrado.
- **d) Todas las anteriores.**

5. Los polígonos de 5 lados se llaman:
- a) Heptágonos.
- b) Hexágonos.
- **c) Pentágonos.**
- d) Ninguna de las anteriores.

6. ¿Qué es una circunferencia?
- **a) Es una curva plana y cerrada tal que todos sus puntos están a igual distancia del centro.**
- b) Es una línea quebrada cerrada.
- c) Es el área de un círculo.
- d) Ninguna de las anteriores.

7. Se calcula sumando las medidas de las longitudes de los lados de una figura.
- a) Área
- **b) Perímetro**
- c) Vértice
- d) Todas las anteriores.

8. Es todo el espacio que queda encerrado en los límites de cualquier figura.
- **a) Área**
- b) Perímetro
- c) Vértice
- d) Todas las anteriores

9. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado que tiene de lado 5 m?
- a) 20 m^2
- b) 10 m
- c) 25 m^2
- **d) 20 m**

10. ¿Cuál es el área de un rectángulo que tiene de base 12 cm y 4 cm de altura?
- a) 48 cm
- b) 30 cm^2
- **c) 48 cm^2**
- d) 32 cm

11. ¿Cuáles son los elementos de un polígono?
- a) Lados.
- b) Lados y diagonales.
- c) Lados y ángulos.
- **d) Lados, vértices, ángulos y diagonales.**

12. ¿Qué es un vértice?
- **a) Punto en que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono.**
- b) Unión de dos puntos.
- c) Línea curva cerrada.
- d) Ninguna de las anteriores.

13. ¿Cómo se obtiene el perímetro de un círculo?
- a) Multiplicando la base por la altura.
- **b) Multiplicando el diámetro por π.**
- c) Sumando π con el radio.
- d) Todas las anteriores.

14. Relaciona la fórmula con la figura que le corresponde para obtener el área.

a) $A = LxL$

b) $A = \frac{h(B+b)}{2}$

c) $A = bxh$

d) $A = \frac{bxh}{2}$

e) $A = \frac{Dxd}{2}$

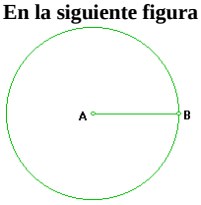
- a) 1a), 2b), 3c), 4d), 5e)
- b) 1a), 2b), 3e), 4c), 5d)
- c) 1c), 2a), 3d), 4b), 5d)
- **d) 1c), 2a), 3e), 4d), 5b)**

15. ¿Qué es un segmento?
- **a) Línea comprendida entre dos puntos.**
- b) Una línea curva cerrada.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

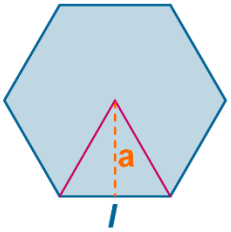
c) La unión de dos lados de un rombo.
d) Ninguna de las anteriores.

16. En la siguiente figura que representa el segmento AB.



a) Perímetro.
b) Π(pi).
c) Radio.
d) Diámetro.

17. En el siguiente polígono que representa la letra "a"



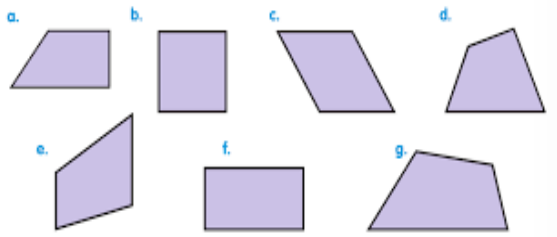
a) Área.
b) Ángulo.
c) Apotema.
d) Ninguna de las anteriores.

18. ¿Cómo se obtiene el perímetro de la figura anterior (pregunta 17)?
a) Sumando seis veces el valor de *L*.
b) Multiplicando el valor de un lado por 2.
c) Multiplicando *L x L*
d) Todas las anteriores.

19. Un cuadrilátero es…
a) Polígono de cuatro lados.
b) Polígono de ocho lados.
c) Figura geométrica triangular.
d) Ninguna de las anteriores.

20. ¿Qué es un paralelogramo?
a) Figura geométrica de ocho lados.
b) Trapecio isósceles.
c) Dos líneas que no se cortan por más que se prolonguen.
d) Cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

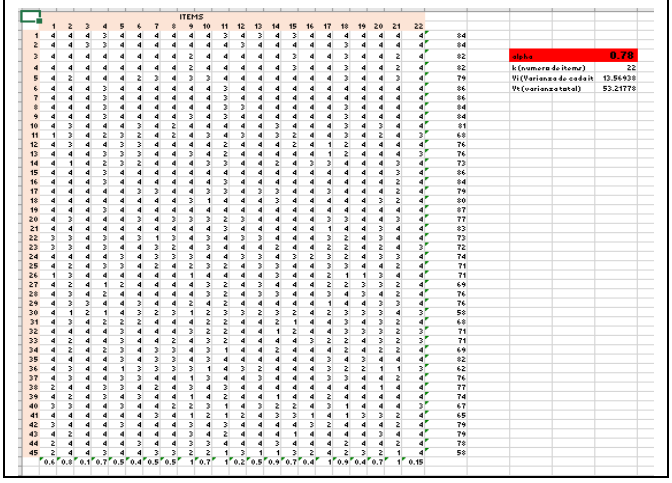
21. De las siguientes figuras cuales son paralelogramos.



a) Todos excepto a.
b) Todos excepto d, e y g.
c) Todas.
d) Solo b, c y f.

22. ¿Cuál es el nombre de los triángulos según sus lados?
a) Acutángulo, obtusángulo, rectángulo.
b) Equilátero, isósceles y escaleno.
c) Rectángulo, cuadrado y trapecio.
d) Ninguna de las anteriores.

Tabla 26. Alpha de 0.78 Instrumento de evaluación diagnóstica



ITEMS																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
1	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	3	4	3	3	4	3	4	4	4	4	4	4	84
2	4	4	3	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	4	3	4	4	4	84
3	4	4	4	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	3	4	4	3	4	4	2	4	82
4	4	4	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	3	4	4	3	4	4	4	2	4	82
5	4	2	4	4	4	2	3	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	3	4	79
6	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	86
7	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	86
8	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	84
9	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	84
10	4	3	4	4	4	3	4	2	4	4	4	4	4	3	4	4	4	3	4	3	4	4	81
11	3	3	4	2	3	2	4	2	4	3	4	3	3	2	4	4	3	4	4	2	4	3	68
12	4	3	4	4	3	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	1	2	4	4	4	4	3	76
13	4	4	4	3	3	3	4	4	3	4	2	4	4	4	4	1	2	4	4	4	4	3	76
14	4	1	4	2	3	2	4	4	4	3	3	4	4	2	4	3	3	4	4	4	3	4	73
15	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	86
16	4	4	4	3	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	4	84
17	4	4	4	4	4	3	3	4	4	3	3	4	3	3	4	4	3	4	4	4	2	4	79
18	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	2	4	80
19	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	87
20	4	3	4	4	4	3	4	3	3	3	2	3	4	4	4	4	3	3	4	4	3	4	77
21	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	83
22	3	3	4	3	4	3	1	3	4	3	4	3	3	3	4	4	4	3	2	4	3	4	73
23	3	3	4	3	4	4	3	3	4	3	4	4	4	2	4	4	2	2	4	4	3	4	72
24	4	3	4	4	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	4	3	3	3	4	4	3	4	74
25	4	2	4	3	3	4	2	4	2	3	2	4	3	3	4	4	3	3	4	4	2	4	71
26	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	2	4	4	3	4	4	79
27	4	2	4	4	2	4	4	4	4	3	2	4	3	3	4	4	2	2	3	3	2	4	69
28	4	3	4	2	4	4	4	4	4	3	2	4	3	3	4	4	3	4	3	4	2	4	76
29	4	3	3	4	4	3	4	4	2	4	2	4	4	4	4	1	4	4	4	3	3	4	76
30	4	1	2	4	3	2	3	1	4	3	3	3	2	3	4	2	4	2	3	3	4	4	68
31	4	3	4	2	2	2	4	4	4	2	2	4	4	2	1	4	4	3	4	3	2	4	69
32	4	4	4	4	3	4	4	4	3	3	2	4	4	1	2	4	4	3	3	3	2	3	71
33	4	2	4	4	3	4	2	4	4	3	2	4	4	3	2	4	4	3	2	4	3	3	71
34	4	2	4	2	3	4	3	3	4	3	1	4	4	2	4	4	2	4	4	2	2	4	69
35	4	4	4	4	3	4	3	3	4	3	4	4	4	4	4	4	3	4	3	4	4	4	82
36	4	3	4	4	3	4	3	3	3	3	4	3	2	4	4	4	3	2	2	1	1	3	62
37	4	3	4	4	3	3	4	4	1	3	4	4	3	4	4	4	3	3	4	4	2	4	76
38	2	4	4	3	3	4	2	4	3	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	1	4	4	77
39	4	2	4	3	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	3	4	74
40	3	3	4	4	3	4	4	2	2	3	1	4	3	2	2	4	3	1	4	4	4	3	67
41	4	4	4	4	4	4	3	4	1	2	2	4	3	3	4	4	4	4	3	3	2	4	65
42	3	4	4	4	3	4	4	4	3	4	3	4	4	4	4	4	3	2	4	4	2	4	79
43	4	2	4	4	4	4	4	4	3	4	2	4	4	4	1	4	4	4	4	3	4	4	79
44	2	4	4	4	4	3	4	4	3	3	4	4	4	3	4	4	4	2	4	4	2	4	78
45	3	4	4	3	3	4	3	3	2	3	1	3	3	1	3	2	4	3	2	1	4	4	58
	0.6	0.8	0.1	0.7	0.9	0.4	0.5	0.5	1	0.7	1	0.2	0.5	0.9	0.7	0.4	1	0.9	0.4	0.7	1	0.15	

alpha	0.78
k (numero de items)	22
Vi (Varianza de cada ít	13.56938
Vt (varianza total)	53.21778

Al finalizar la aplicación de la propuesta didáctica se realizó una prueba objetiva de conocimientos con el objetivo de medir los avances en el aprendizaje de los alumnos, y la eficacia que tuvo la implementación de materiales concretos y la creación de materiales virtuales, como se muestra en la tabla 27; esta prueba fue diseñada y validada con un Alpha de Cronbach de 0.75, como se muestra en la tabla 28 la prueba objetiva está compuesta de 12 reactivos, en los cuales se evalúa los conocimientos teóricos, y la aplicación y desarrollo de fórmulas para la obtención de áreas y perímetros.

Tabla 27. Instrumento de evaluación final

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN FINAL
INDICACIONES: Lee atentamente las preguntas y subraya la respuesta correcta a cada una de las preguntas.
Lee todas las preguntas y subraya el inciso que corresponda a la respuesta correcta.

1. Figura geométrica plana, limitada por rectas (llamadas lados) que forman una línea quebrada cerrada.
a) Círculo.
b) Polígono.
c) Angulo.
d) Ninguna de las anteriores.

2. Curva plana y cerrada, la cual delimita el área del círculo.
a) Cuadrado
b) Círculo
c) Circunferencia
d) Todas las anteriores

3. ¿Cómo se clasifican los triángulos?
a) Según sus lados; según sus ángulos.
b) Según sus áreas.
c) Según sus perímetros.
d) Ninguna de las anteriores.

4. ¿Qué es el perímetro?
e) Una línea recta.
f) La suma de todos los ángulos.
g) La suma de las longitudes de todos los lados del polígono.
h) Todas las anteriores.

5. ¿Qué es el área?
a) El contorno de un círculo.
b) Suma de las longitudes de los lados del polígono.
c) Medida de la superficie que cubre un cuerpo o figura geométrica.
d) Ninguna de las anteriores.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

6. ¿Cuál es el nombre de los cuadriláteros que tiene dos pares de lados opuestos paralelos?

a) Circunferencia.
b) Triángulos.
c) Paralelogramos.
d) Trapezoide.

7. Calcula el perímetro y área de un triángulo equilátero que mide 10 cm de lado y 8 cm de altura, escoge las medidas que correspondan.

a) P= 10 cm; A= 80 cm^2
b) P= 35 cm; A= 80 cm^2
c) P= 60 cm; A= 40 cm^2
d) P= 30 cm; A= 40 cm^2

8. ¿Cuál es el perímetro de polígonos regulares de 5, 6, 7, y 9 lados si todos tienes un lado de 3.5 m?

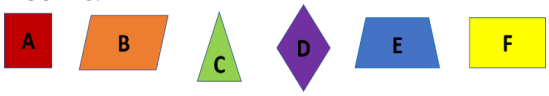
a) 10 m, 20 m y 30 m.
b) 17.5 m, 21 m, 24.5 m y 31.5 m.
c) 15 m, 21 m, 24 m y 28 m.
d) 17.5 m, 21 m y 22 m

9. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo cuyo diámetro mide 10 cm?

a) 15.708 cm.
b) 78.54 cm.
c) 31.416 cm.
d) Ninguna de las anteriores.

10. Relaciona la letra de cada figura geométrica con la fórmula para calcular el área que le corresponde, selecciona el inciso que tenga el orden correcto.

FIGURAS:



FORMULAS:

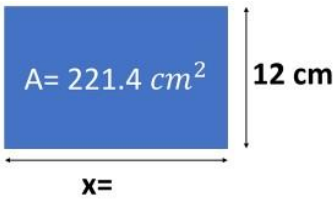
1) $\frac{bxh}{2}$	2) bxh	3) $\frac{Dxd}{2}$	4) L^2	5) $\frac{(B+b)x\,h}{2}$

a) A, 1; B, 2; C, 3; D, 4; E, 5. F, 6.
b) A,4; B, 4; C, 1; D, 4; E, 4; F, 2.
c) A, 4; B, 2; C, 1; D, 3; E, 5; F, 2.
d) A ,2; B, 2; C, 3; D, 1; E, 5; F, 4.

11. Los polígonos regulares tienen:

a) Todos sus lados desiguales.
b) Lados y ángulos iguales.
c) Ángulos desiguales.
d) Todas de las anteriores.

12. ¿Cuánto mide "x" en el siguiente rectángulo?



a) 20 cm
b) 14.45 cm
c) 18.45 cm
d) Ninguna de las anteriores.

Tabla 28. Validación de evaluación final con Alpha de 0.75

ALUMNO	ITEMS 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	SUMA	SUMA AL CUAD
1	4	2	3	4	3	2	4	2	2	4	4	3	37	1369
2	4	4	4	4	4	2	4	4	3	1	4	4	42	1764
3	3	4	4	4	3	4	4	2	4	3	3	4	42	1764
4	3	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	2	39	1521
5	1	3	2	3	4	4	2	4	3	1	1	4	32	1024
6	3	3	4	4	4	3	3	3	2	3	3	2	37	1369
7	3	3	4	4	1	4	3	4	2	4	3	4	39	1521
8	3	3	3	3	4	3	2	4	4	4	2	4	39	1521
9	4	4	4	3	4	2	2	3	2	2	3	2	35	1225
10	2	3	4	1	4	1	3	4	1	3	3	4	33	1089
11	4	2	4	4	4	3	4	4	4	2	4	3	42	1764
12	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	48	2304
13	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	45	2025
14	4	4	3	4	4	3	2	4	4	3	3	2	40	1600
15	3	3	3	4	4	3	4	4	4	4	4	4	44	1936
16	4	3	1	3	1	1	4	2	3	2	1	1	26	676
17	2	2	4	2	4	4	1	2	1	3	4	1	30	900
18	4	4	3	4	4	4	3	4	3	4	3	4	44	1936
19	4	3	1	4	1	2	1	3	4	2	3	1	29	841
20	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	47	2209
	66	65	67	71	69	61	62	69	61	58	60	61	770	30358
	0.7	0.5	1	0.7	1.2	1.1	1.1	0.7	1.1	1	1.1	1.4	11.7	37.526316	37.5263

SECCIÓN 1	1.091
SVI	11.67
VT	37.53
SECCIÓN 2	0.689
ALFA (α)	0.752

Los instrumentos de evaluación (diagnóstico y final) están relacionados en sus objetivos, en la tabla se muestra la categoría en la que se localizan los reactivos del instrumento diagnóstico y el final, estas categorías describen los conocimientos que deben tener presenten para lograr el aprendizaje esperado, como se muestra en la tabla 29.

Tabla 29. Correlación de exámenes.

Categoría	Reactivo del examen diagnostico	Reactivo de la prueba objetiva (examen final)
Identificar el concepto de triángulo y su clasificación.	3 y 22	3
Identificar el concepto de cuadrilátero y su clasificación	4,19, 20 y 21	6
Identificar el concepto de polígono, sus propiedades y clasificación	1, 2, 5, 11, 12, 15 y 17	1 y 11
Identificar el concepto de circunferencia y elementos del circulo	6 y 16	2
Identificar el concepto de perímetro y la fórmula para obtenerlo.	7,13 y 18	4
Identificar el concepto de área y reconocer las fórmulas para obtener el área en triángulos y cuadriláteros.	8 y 14	5 y 10
Aplicar y desarrollar fórmulas para determinar el perímetro y área	9 y 10	7, 8, 9 y 12

Después de contabilizar y analizar los resultados de ambas pruebas (diagnostica y final) se graficaron para comparar los resultados; en la prueba diagnóstica el 50.6% de las preguntas fueron contestadas correctamente, de una población de 22 alumnos en el grupo de 1° D.

En la prueba objetiva el porcentaje de preguntas contestaste correctamente fue del 74.2%, indicando un aumento de la primera prueba a la segunda, aplicada al finalizar la propuesta didáctica. Es decir, se tuvo un incremento del 23.6% en el nivel estratégico y por lo tanto una disminución en el nivel inicial-perceptivo, como se muestra en la figura 16.

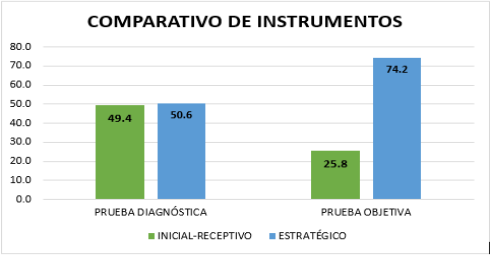


Figura 16. Incrementos.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Con base al diagnóstico del grupo 1° D, de la Escuela Secundaria No. 87 "Republica de Filipinas" que presenta que los alumnos son en 18% visuales, 27% auditivos y 55% kinestésicos, al diseñar una secuencia didáctica mediante el uso de material concreto, formado por material concreto, hojas de trabajo, material recortable, comparación visual y táctil de circunferencia y diámetro, y virtual, como creación de videos de repaso de contenido matemático; ésta permitió lograr el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema cálculo de perímetro de polígonos, de círculos, áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando formulas en donde se aprecia que en la prueba diagnóstica los alumnos se distribuyeron en los dos niveles de adquisición descritos en la rúbrica y en la séptima sesión en el nivel dos; representando un incremento que describe el avance durante la secuencia del 23.6%.

Al implementar la justificación de fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares, ésta logró que los alumnos adquirieran los conocimientos correspondientes al contenido "calcula el perímetro de polígonos y del círculo y áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas"; asimismo se fomentó el cumplimiento de los propósitos de la materia, establecidos en el plan de estudios 2017 de la SEP [21].

V. Conclusiones

Durante las secuencias didácticas anteriormente descritas se utilizaron diversos instrumentos validados para poder medir estilos de aprendizajes, socioeconómicos y sociogramas; así como para medir la actitud hacia el estudio de las matemáticas, valores y habilidades correspondientes al área de matemáticas qué se trabajó, brindando un diagnóstico objetivo el grupo y de cada estudiante.

Al construir instrumentos para poder medir los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante una secuencia didáctica, se obtuvieron pruebas objetivas válidas que permiten de manera objetiva observar el incremento en el aprendizaje.

Utilizar una correlación entre los reactivos de los instrumentos de conocimientos previos con respecto al instrumento para medir los conocimientos finales permitió una correspondencia que permite medir la diferencia entre ambos para obtener el incremento en el aprendizaje de los estudiantes de secundaria.

Realizar propuestas innovadoras que utilicen ideas y tecnología cómo APPs, hologramas, realidad aumentada, realidad virtual, videojuegos, diagramas y materiales manipulables llama la atención del estudiante de secundaria mejorando sus habilidades, valores y actitudes hacia el estudio de las matemáticas; cómo se puede observar en las secuencias anteriores donde se obtuvieron resultados exitosos.

Referencias

[1] Secretaría de Educación Pública. Plan de estudios 2011. México: SEP (México,2011).

[2] Celina, H. y Campo, A.: Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach: *Revista colombiana de psiquiatría, vol. XXXIV, número 004, Asociación Colombiana de Psiquiatría, Bogotá, Colombia* (Colombia, 2005).

[3] Ramírez, R.: Los nuevos rumbos de la didáctica: *Concepción Jiménez Alarcón (comp.), Rafael Ramírez y la escuela rural mexicana, 2ª ed., México, El Caballito/SEP (Biblioteca pedagógica)* (México,1998).

[4] Metts, R..: Mapas Mentales y Estilos De Aprendizaje (Aprender A Cualquier Edad): Editorial Club Universitario. (Madrid, 1999).

[5] Fernández, I.: Construcción De Una Escala De Actitudes Tipo Likert. Insht. (Madrid,1982). Recuperado El 3 de junio de 2020 Disponible en: http://www.insht.es/inshtweb/contenidos/documentacion/fichastecnicas/ntp/ficheros/001a100/ntp_015.pdf.

[6] Bandler, R., & Grinder, J: Use su Cabeza para Variar. Cuatro Vientos, Santiago de chile. *Seminario Dictado por por el Autor en el que Enseña Diferentes y Eficaces Tecnica de Progrmación Neurolingüistica (PNL)* (Chile,1998) .

[7] Dorinda, M. M.: Evaluación de las Actitudes Hacia las Matemáticas y el Rendimiento Académico (España , 2010).

[8] Romero, O. E.. Evaluación del Nivel Socioeconómico: Presentación de una Escala Adaptada en una Población de Lambayeque (Perú, 2012)

[9] Antolín , S. L. Desarrollo y Validación de una Escala de Valore para el Desarrollo Positivo Adolescente (2011, España).

[10] Cabello, A. B.: La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca. (España, 2013).

[11] Duval, R.. Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales: Universidad del Valle. (Colombia, 1999)

[12] Cancio, M. R.: Materiales y Recursos en Educación Infantil. Manual de Usos Prácticos para el docente: Vigo, Ideaspropias Editorial. (Madrid, 2005)

[13] Mariño, A: Educación Integral. *Reflexiones y Experiencias*. 49-76. (México,2000)

[14] Pascual, L. S.: Lo mejor de www.mnemotecnia.es: *7 años contigo . Creative Commons* (España,2004)

[15] Arceo, F. D., & Rojas, G. H: Estrategias Docentes para un Aprendizaje significativo. Una Interpretación Constructivista: McGraw-Hill (México,2002).

[16] Sánchez, A. M.: Aula en la Educación Infantil. *García Hoz*, 225-261 (1991, México).

[17] Brousseau, G: Didáctica de las Matemáticas: Los Diferentes Roles del Maestro. Aportes y Reflexiones: Paidos (México, 1997).

[18] Duval, R. Les conditions cognitives de I´appretissage de la géometrie: développement de la visualisation, diferenciation des raisonnements et cordination de leurs fonctionnements. *ANNALES de DIDACTIQUE et CIENCIES COGNITIVES*, 10, 5-53 (Francia, 2005)

[19] Lee, H.: 3D Holographic Technology and Its Educational Potential: *TeachTrends*,57,4, (USA,2013).

[20] Orcos, L.: Diferentes experiencias de aprendizaje en ciencias y matemáticas a través de Tecnologías de la Información y la Comunicación: Universidad politécnica de Valencia (España, 2018)

[21] Secretaría de Educación Pública: Plan de estudios 2017: SEP (México, 2017)

[22] Bloom, B.: Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals- Handbook1, Cognitive Domain. (New York, 1956)

[23] Castaño, M.L.: Elementos de Euclides (Trad. Puertas Castaños, M. L.): Gredos. (España, 1991).

[24] Chen X, Chang L, He Y y Liu H. The Peer Group as a Context: Moderating Effects on Relations Between Maternal Parenting (USA,2005).

[25] Salvador R.: Didáctica de la geometría: Modelo Van Hiele: Universidad de Valencia (España, 1989)

[26] Rodríguez, S. V.: El método de enseñanza de matemática Singapur: "Pensar sin límites": *Revista Pandora*, 27, 1-3 (Brasil,2011)

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Como no enseñar conservación de la masa.

Sealtiel Pichardo Jiménez.
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
phimath52@gmail.com

***Resumen*- Se determina un experimento que NO muestra la conservación de la masa y otro que SI la muestra; en uno de ellos se plantea un reto: calcular el volumen de un globo(688mL± 18:45%), lo cual ayudará a comprobar las primeras inferencias y de manera general describir la fuerza boyante o de empuje como la diferencia de masa (0:63±0:1)g; los resultados obtenidos son satisfactorios, ya que se aproximan los datos esperados y los datos experimentales (0:4 ± 0:1)g; en total se realizan tres experientos de los cuales el tercero es un auxiliar del primero. En la sección de análsis se recurre a un dato obtenido en la página oficial del CENAM: la densidad del aire (*ρ*air = 9:19x10±4 g cm3 ± 0:38%).**

***Palabras Clave*-enseñanza de física, sistemas, experimentos , didáctica, fuerza boyante.**

Abstract- An experiment is determined that does NOT show the conservation of the mass and another that DOES show it; in one of them a challenge arises: calculating the volume of a balloon (688mL ± 18: 45%), which will help to check the first inferences and generally describe the buoyant or thrust force as the difference in mass (0 : 63 ± 0: 1) g; the results obtained are satisfactory, since the expected data and the experimental data (0: 4 ± 0: 1) g are approximated; In total, three experiments are carried out, of which the third is an assistant to the first. In the analysis section, a data obtained from the official CENAM website is used: the air density (ρair = 9: 19x10 ± 4 g cm3 ± 0: 38%).

Keywords- teaching of physics, systems, experiments, didactics, buoyant force.

***Mathematical Subject Classification:* 97M50**

I. Introducción

La ley de la conservación de la masa enuncia: "La masa no se crea ni se destruye, sólo se transforma"[1] haciendo referencia que en una reacción química la suma de la masa de los reactivos (sustancias a mezclar) es igual a la suma de la masa de los productos (sustancia obtenida).

Esta forma de ver las reacciones se debe al químico francés Antoine Laurent Lavoisier quien por medio de sus observaciones notó que las sustancias reaccionantes al interactuar entre si forman nuevos productos con propiedades físicas y químicas diferentes a las de los reactivos.[1]

Esta igualdad se espera en un SISTEMA CERRADO, ya que muchas reacciones pueden liberar gases o perder masa de alguna otra forma; en la figua 1 se busca representar esta idea.

Entonce la reacción de sustancias puede tener varias manifestaciones, de ahí, que algunas sean exotérmicas y otras endotérmicas, pero no necesariamente alguna de estas dos, por ejemplo: *Una pastilla de Alka-Seltzer, al reaccionar con agua produce dióxido de carbono que se libera en forma de gas*.
A continuación se estudia esta reacción.

II. Práctica

Objetivos:

Estudiar la conservación de la masa

Conocer un experimento óptimo que permita observar la conservación de la masa

Determinar el volumen de un globo

Material 1:

- Balanza de Triple brazo (±0.1g)
- Matraz Erlen Meyer 25mL (±1mL)
- Globo
- Una pastilla de Alka-Seltzer

Material 2:

- Balanza de Triple brazo (±0.1g)
- Una pastilla de Alka-Seltzer
- Botella Plástico 600mL
- Agua
- Tira de cinta adhesiva

Material 3:

- Tina
- Botella con conector
- Probeta 1L (±5mL)
- 2 llaves de tres vias
- Balanza Scout-pro (±0.01g)
- Cubeta
- Soporte Universal Bomba BISA
- Manguera
- Tapón con globos
- Tubo de vidrio con maguera y conéctor
- Pinza de 3 dedos
- Nuez

La rección química se describe en la figura 1.

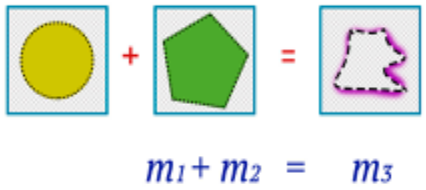


Fig. 1. Reacción química en un sistema cerrado

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

III. Desarrollo Experimental

PARTE I.

Es un experimento que se plantea en escuelas primarias y secundarias[2] para estudiar la conservación de la masa, ¿cómo se realiza el instrumento?

Se llenó el matraz con más de 25 mL de agua, mientras se colocaba la pastilla de Alka-Seltzer (en trozos) dentro del globo ; posteriormente se colocó el globo en la boquilla del matraz, teniendo así nuestro instrumento(ver figura 2).

Para realizar el experimento, primero se tiene que hacer la medición(de la masa) del instrumento ANTES de la reacción química y otra medición después de ella. Cuando se deja caer la pastilla al agua que se encuentra dentro del globo , comienza la reacción que se describe en la introducción, haciendo que el globo se llene de gas.

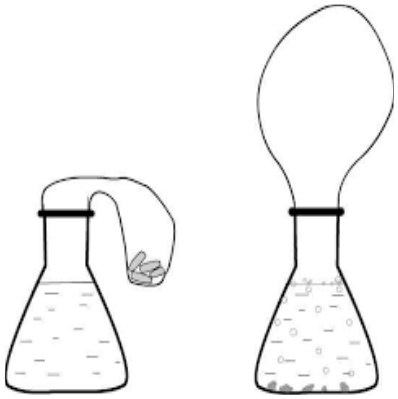


Fig. 2: Instrumento antes de la reacción e instrumento después de la reacción.

PARTE II.

El sistema es análogo al anterior, con la condición de que el sistema estuvo cerrado y poco flexible, en este caso el instrumento se construyó de la siguiente manera (Ver figura 3): En una botella de 600 mL (aprox.) se colocó agua hasta antes de la mitad (1); en la tapa sepegó un pedazo de cinta adhesiva donde a la vez se colocaron los pedazos de la pastilla Alka-Seltzer(2); se tuvo que cerrar la botella con tal cuidado que no cayera ningún pedazo de la pastilla (3).

Al igual que la primera parte de la práctica se realizó una medición del instrumento antes de la reacción y una después de ella(4); para realizar la reacción fue necesario mover la botella ligeramente sin agitar.

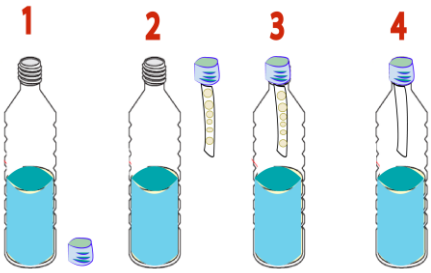


Fig. 3: Instrumento de la parte dos

PARTE III.

Esta tercerá parte surge como resultado de contestar la prégunta ¿Cómo medir el volumen de un globo?, Para posteriormente comprobar la diferencia de masa del instrumento uno.

Se colocó la tina al centro de la mesa, colocando la probeta boca a bajo y con el tubo de vidrio con la manguera y sujeta con el soporte universal y la pinza de tres dedos.

Se tuvo que vaciar el agua a la tina con ayuda de la cubeta, mientras el otro extremo de la manguera se utilizó para conectar las llaves de tres vias que también se conectaron a la jeringa con los tubos correspondientes para así sacar el aire y otra botella con conector rápido.

La botella se llenó de aire con la bomba BISA, la cual se pesó antes y después de pasar aire al globo; después de eso se pasaba el aire a la probeta. Cuando de dejaba pasar el aire del globo la probeta bajaba el nivel del agua, así se obtenia el volumen del aire dentro del globo; Notando la diferencia entre la .altura"del agua de las probetas (ver figura 4).

Fig. 4 Volumen del globo

IV. Datos experimentales.

A continuación se exhibe las mediciones de la masa de la primera y segunda parte,recordando que la tercera es resultado de otra cuestión. Teniendo masa y volúmen, enlistados en la siguientes tablas 1 y 2.

Tabla 1: Mediciones de la primera y segunda parte

	Masa antes de reacción	Masa después de la reacción
1ra Parte	(58.7 ±0.05)g	(58.3 ±0.05)g
2da Parte	(254.1 ±0.05)g	(254.0±0.05)g

Tabla 2: Volumen del globo con incertidumbre porcentual

Volumen del Globo
688 mL ±18.45 %

Nota: Para la tercer parte (medición del volumen del globo) se encuentran los datos comple- tos en el anexo de tablas, en esta sección basta con presentar la tabla 2.

V. Análisis de datos

A) Respecto a la conservación de la masa

Apreciamos en la Tabla 1 que en la primera parte existe una diferencia de masa de: 0.4g a diferencia de la segunda parte que tan solo difiere de 0.1g. De esta manera se puede afirmar que el primer instrumento NO es eficiente para mostrar la conservacion de la masa[3]; para el segundo instrumento solo queda mejorarlo como por ejemplo utilizar

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

una botella de vidrio y/o realizar un mejor sellado en la tapa de esta.

Pero ¿por qué después de la reacción el instrumento tiene menor masa?

Para esto se consulta cualquier libro de física y en la sección de fluidos se encuentra el principio de Arquímides el cual enuncia[1]:"Si un cuerpo esta parcial o totalmente sumergido en un fluido, este ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido dezplazado por el cuerpo",particularmente el fluido donde esta inmerso el instrumento es el aire.

Al observar la figura 5 antes de hacer la reacción, se aprecia que:

$$Fw = F1 \qquad (1)$$

Pero después de hacer la reacción se tiene que:

$$Fw = F2 + FB \qquad (2)$$

Que justamente esta FB se le conoce como fuerza boyante o empuje, haciendo referencia al principio de Arquímides.

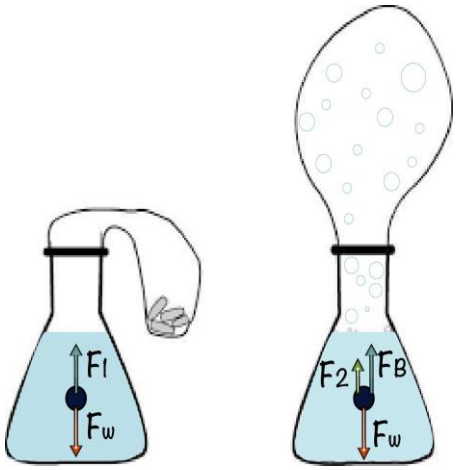


Figura 5: Principio de Arquímides en el instrumento 1

Igualando (1) y (2) obtenemos es decir

$$F1 = F2 + FB$$
$$FB = F1 - F2 \qquad (3)$$

De lo cual ahora se comprende esa diferencia de masa justamente es la fuerza boyante, es decir, el instrumento con el globo inflado desplaza mayor fluido(aire) por lo cual existe mayor fuerza de empuje, haciendo que este tenga una menor masa.

b) Del volumen del globo

Si se sigue analizando la ecuación (3), se notará que cada una de las fuerza (F1 y F2) se pueden expresar según la segunda ley de Newton como m1g y m2g, con g = 9.78m/s2 (por estar en la CDMX); además la fuerza boyante se define como:

ρf luidoVobjetog

Considerando que el fluido es el aire y el objeto es el globo, la ecuación (3) queda como :

$$\rho air\ Vglobog = m1g - m2g\ \rho air\ Vglobog = (m1 - m2)g$$
$$\rho air\ Vglobo = m1 - m2 \qquad (4)$$

Donde esta ecuación(4) reafirma nuestro análisis pasado, pero queda COMPROBAR si la dife- rencia de masa obtenida experimentalmente coincide con la que se puede calcular con (4).

Para conocer la densidad del aire se acudió a la página del CENAM [4] y se introdujeron las condiciones a las que se encontraban como en la figura 6.

Figura 6: cálculo de la densidad del aire por medio del CENAM

De esta manera tenemos que:

$$\rho\, air = 9{:}19x10^{-4}\frac{g}{cm^3} \pm 0{:}38\%$$

$$Vglobo = 688mL \pm 18{:}45\%$$

Por lo cual la ecuación (4) tiene los valores:

$$(9{:}19x10^{-4}\frac{g}{cm^3} \pm 0{:}38\%)(688mL \pm 18{:}45\%) = m1 - m2$$
$$(0{:}63 \pm 0{:}1)g = m1 - m2$$

El valor se aproxima al resultado obtenido si se utiliza la incertidumbre, es decir la diferencia de masas teóricamente es de 0.53 g y la que se obtuvo experimentalmente es (0.40 ± 0.1)g, que de igual manera al ocupar la incertidumbre podemos decir que es de 0.5 g, locual ahora si se aproxima a lo inferido.

VI. Conclusiones

Se puede asegurar que el instrumento 1 NO es viable para mostrar la conservación de la masa, a diferencia del instrumento 2 que se aproxima mayormente; Además de comprobar que la diferencia de masa es la fuerza boyante.

Finalmente para que la ley de Lavoisier sea cierta se necesita estrictamente un sistema cerrado y además de un sistema no deformable, es decir un sistema que no adquiera volumen después de la reacción[4] .

Se observa que los resultados son aceptables al tener una incertidumbre por debajo del 5 %, excepto en la tabla 2 donde se tiene una incertidumbre por arriba del 10 %; condición que se tendrá que trabajar en futuros experimentos.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

VII. ANEXO: TABLAS

Globo sin inflar	Globo inflado	Volumen del globo
$(53.03\pm0.01)g$	$(52.57\pm0.01)g$	$(520\pm5)mL$
$(54.60\pm0.01)g$	$(52.65\pm0.01)g$	$(600+600+600-480=570\pm20)m$
$(53.14\pm0.01)g$	$(52.59\pm0.01)g$	$(640\pm5)mL$
$(52.76\pm0.01)g$	$(52.59\pm0.01)g$	$(210\pm5)mL$
$(55.62\pm0.01)g$	$(52.72\pm0.01)g$	$(800+800+800+860=815\pm20)m$
$\overline{m}\pm\delta m$	$\overline{m}\pm\delta m$	$\overline{v}\pm\delta m$
$(53.83\pm1.79)g$	$(52.62\pm0.1)g$	$(688\pm127)mL$

Tabla 3 Masa del instrumento antes, después de inflar y volumen del globo.

REFERENCIAS

[1] Calderón Antonio, Colavita E. & Zamora O., *Ciencias 3: Química*, Editorial Castillo, IBSN:978-607-463-950-6, pp:60. (México, 2018)

[2] *http://www.cenam.mx/publicaciones/cdensidad.aspx, consultado el 22/enero/2020*

[3] Young, Hugh D. & Roger A. Freedman 2009: *Física Universitaria volumen I*, Editorial Per- son Educación; IBSN: 978-607-442-288-7, pp:380 (México,2009)

[4] Oda Noda, Berta: *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. Las prensas de ciencias 3a edición (México,2005)

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas.

Nayeli Lopez Tailes
Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
nayelinsmm@gmail.com

Resumen- **A través del cálculo combinatorio se propone determinar las formas en que se pueden representar, modelar y simular diferentes arreglos de elementos en un conjunto aleatorio y algunas aplicaciones con variaciones, permutaciones y combinaciones utilizando funciones; ya que el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico. Este tópico representa importancia en la enseñanza, donde los alumnos pueden realizar actividades características de matematización: hacer conjeturas, generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.**

Palabras Clave- **combinatoria, variaciones, permutaciones, funciones, enseñanza de las matemáticas.**

Abstract- Through combinatorial calculus, it is proposed to determine the ways in which they can represent, model and simulate different arrangements of elements in a random set and some applications with variations, permutations and combinations of functions; since combinatorial analysis expresses a fundamental operational scheme for logical reasoning. This topic represents importance in teaching, where students can perform characteristic mathematical activities: making guesses, generalization, optimization, and systematic thinking.

Keywords- combinatorial, variations, permutations, functions, maths teaching.

Mathematical Subject Classification: **97D50.**

I. Introducción

La combinatoria pertenece un área de las matemáticas discretas, en donde éstas se ocupan de estudiar las distintas configuraciones de conjuntos no continuos; es decir finitos o infinitos numerables, que pueden obtenerse, a partir de sus elementos dados mediante ciertas trasformaciones que originan cambios en la estructura o la composición de estos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos que asignan como resultado diferentes permutaciones, combinaciones y variaciones[1].

El diseño y aplicación del cálculo combinatorio permite orientar el proceso de enseñanza–aprendizaje a través de situaciones reales; así mismo contribuye al desarrollo del pensamiento sistémico en el que le permite abordar todos los elementos que lo componen y las relaciones entre ellos; su enumeración, construcción de algoritmos y la abstracción de las propiedades que satisfacen ciertas condiciones establecidas[2]. Una de las funciones de la matemática es modelar procesos y fenómenos de la realidad, algunos de ellos son de tipo aleatorio y es en la resolución de problemas combinatorios donde generalmente se debe examinar todas las posibilidades para llegar a una generalización[3].

La combinatoria ha ganado mucha importancia debido a sus amplias aplicaciones en la teoría de probabilidades, estadística, teoría de números, lógica, informática y teoría de grafos. El objeto de estudio de la combinatoria ha evolucionado con el tiempo, actualmente el análisis combinatorio busca encontrar los principios y teorías unificadoras que permitan ordenar y sistematizar el gran número de resultados existentes aparentemente dispersos e inconexos y sin relación[3].

El presente trabajo recapitula los orígenes de la combinatoria en donde subyacen las primeras nociones y conceptos básicos del cálculo combinatorio gracias a los trabajos de grandes matemáticos en el mundo antiguo y su crecimiento acelerado a partir de la segunda mitad del siglo XX. Expone un marco teórico sobre las bases de la combinatoria y propone problemas didácticos a partir de funciones inyectivas para la aplicación real de permutaciones, variaciones y combinaciones. Mediante el Aprendizaje Basado en Problemas se presentan situaciones reales, donde se puede realizar conjeturas y estrategias de solución para estos tópicos.

Uno de los conceptos torales dentro de la combinatoria es el de coeficiente binomial (n,r) el cual cuenta el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La teoría desarrollada para este concepto es basta y fructífera en aplicaciones. Dentro de esta resaltan las identidades combinatorias, las cuales son igualdades que contienen coeficientes binomiales[1].

II. Orígenes de la Combinatoria

El estudio de la combinatoria se desarrolló paralelamente con el de otras ramas de la matemática, tales como el álgebra y teoría de números, ya que sus primeros hallazgos datan de China en el siglo XXII. Los cuadrados mágicos son ejemplos de los más antiguos que existen sobre problemas de combinatoria[4]; éstos aparecen y fueron la base del famoso libro místico chino I – Ching (易經) hacia 1200 A.C[5]. Es importante resaltar que los cuadrados mágicos inscritos en el caparazón de una tortuga son un arreglo de elementos de un conjunto finito que responde a una determinada condición, cuya base combinatoria consta de 64 hexagramas que muestran todas las permutaciones posibles de dos tipos de líneas, al tomarlas de seis en seis[5].

Por otro lado el escrito Chino Pa Kua (八卦) es otro ejemplo de los más antiguos libros en donde se exhiben

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

problemas sobre el cálculo combinatorio mediante el número de permutaciones de una serie de segmentos dispuestos alrededor de un círculo [6].

En el libro chino el precioso espejo de los cuatro elementos (四个元素的珍贵镜子) de Zhu Shijie en 1303, aparece un diagrama conocido como el triángulo aritmético, en el que se presentan diferentes desarrollos binomiales hasta la potencia octava, así como el desarrollo de series y progresiones[7].

Otro encuentro del concepto de permutación se encuentra en la obra Hebrea de Sefer Yetzirah, un manuscrito elaborado entre el año 200 y 600; aunque tiempo atrás, Xenocrates de Calcedonia (96 314 a.C) habría propuesto la solución[8].

En el mismo siglo XXII el matemático Hindú Bhaskara comienza a explorar este campo; en el primer volumen de su obra principal el Siddhānta Shiromani (1150) donde publica el tratado Līlāvatī dedicado a la combinatoria en el cual vislumbra el problema de la distribución de objetos o partición de conjuntos y enuncia una regla para hallar el número de colocaciones de n cosas de una clase y (m-n) de otra[9].

El matemático y astrónomo judío Levi Ben Gerson en su libro De harmonicis numeris (1343) realizó un estudio más detallado de las permutaciones, arreglos y combinaciones de un conjunto de objetos argumentando la igualdad del número de colocaciones de n cosas de una clase K; la cual implícitamente se encierra el modelo de partición de un conjunto [10].

Por otro lado; el término “coeficiente binomial” fue introducido realmente por Michel Stifer (1486-1567) en su obra Arithmetica Integra (1544) indicando los coeficientes binomiales hasta el orden n=17 [11] .

Tartaglia en su libro Trattato di numeri et misure (1560) introdujo un triángulo que proporciona una regla para calcular combinaciones; ya que fue el primero en ocuparse del rencuentro del número de combinaciones diferentes en el juego de dados[12] .

Tiempo después Gerolamo Cardano en su libro Liber de ludo aleae (1663) constituye el primer tratado serio de probabilidad abordando métodos de cierta efectividad en la combinatoria a partir de juegos de azar y deduciendo los coeficientes de $(a+b)^n$; dando como resultado que el número de combinaciones de n elementos tomadas era $(a+b)^2$ terminando con la solución a la ecuación cúbica[13] .

Las contribuciones de Fermat y Pascal dan un giro al trasfondo relevante de la combinatoria, siendo a través de los juegos de azar donde se visualizan los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito; en particular sobre el problema de la división de la apuesta planteado por el caballero de Meré[14] .

Los matemáticos anteriormente descritos reconocen el análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal; dejando ver a ésta como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas.

En el libro Traité du triangle arithmétique (1653) Pascal publica un tratado acerca de las relaciones entre los coeficientes binomiales, las combinaciones y los polinomios; además demostró la identidad de Pascal donde expresa la suma de potencias de los primeros n números naturales [15].

Aunque Pascal y Fermat no expusieron sus resultados de los juegos de azar; más tarde en el libro De Ratiocinnis in ludo aleae de Huygens (1657) resolvió algunos problemas propuestos por ellos [16].

El primero en introducir el término “combinatoria” es Gottfried Leibniz en su obra Disertatio de arte combinatoria (1666); además realiza la construcción sistemática del conocimiento combinatorio que se había obtenido hasta la época[17].

Posteriormente Bernoulli en la obra Ars Conjectandi (1713) incorporó temas combinatorios fundamentales como la teoría de permutaciones y combinaciones; así como la derivación, las propiedades de los números, definió la combinatoria como el arte de enumerar todas las formas posibles en las que un número determinado de objetos n puede combinarse y demostró el teorema binomial para el caso n entero positivo mediante el uso de la fórmula para las combinaciones[18].

El símbolo (n, k) se introdujo en el siglo XIX cuando fue utilizado por Andreas Von Ettinghausen en 1878[4].

Tiempo después Abraham de Moivre publica su obra llamada "The Doctrine of Chance" (1718); considerado clave para el principio del estudio de la probabilidad [19].

Posteriormente Pierre Simon Laplace recopiló las ideas de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph Lagrange en su obra Théorie Analytique des Probabilités (1812) donde hace un extraordinario trabajo sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad; siendo la base matemática para desarrollar el análisis combinatorio[20].

La combinatoria entró en un periodo exponencial de desarrollo con el crecimiento de problemas de la matemática discreta que coadyuvan esta rama.

Las aportaciones de Galois(1831) fueron fundamentales para su investigación en teoría de grupos sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica[21].

Euler por su parte gracias a su célebre problema matemático de los siete puentes de Königsberg resuelto en 1736 dio origen a grandes resultados en combinatoria y teoría de grafos; así como el diseño de experimentos estadísticos [22].

F.P.Ramsey descubrió un importante teorema combinatorio de existencia (1930) trabajando en el contexto de la lógica de la matemática [23]. En la década de 1930 Paul Erdös y otros matemáticos húngaros dieron un nuevo impulso a la combinatoria [24].

En el libro Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad (Основы теории вероятностей) de Kolmogórov (1933) estructura el sistema axiomático y formalizado de la teoría de la probabilidad utilizando la teoría de conjuntos [25].

Años después en la revista acta mathemática Polya escribe un artículo titulado enumeración combinatoria para grupos, grafos y compuestos químicos (1937), desarrollando una poderosa técnica para resolver problemas de enumeración; su método está basado en la teoría de grupos y ha tenido gran influencia en el desarrollo contemporáneo de la teoría combinatoria[26].

En los últimos años la combinatoria entró en un período de intenso desarrollo relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de la matemática discreta ejemplos de tales teorías son: las funciones multiplicativas estudiadas en teoría de números y combinatoria, introducidas en 1832 por el matemático alemán August Ferdinand Möbius[27].

Hassler Whitney (1933) a partir de su trabajo en teoría de gráficos sentó las bases del matroide, una noción fundamental en combinatoria y teoría de la representación moderna[28].

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Las tablas de Young en 1900 sirvieron como objeto combinatorio relacionado con la teoría de representaciones y funciones simétricas. Al mismo tiempo tiene lugar un gran desarrollo de las ramas más ricas en aplicaciones inmediatas, tales como la optimización en situaciones aleatorias reales de combinatoria [29].

En el libro Principles of combinatorics (Berge, 1968) propone describir la combinatoria como el estudio de las configuraciones formadas con los elementos de un conjunto; entendiendo por tales las aplicaciones del conjunto en otro, posiblemente provisto de cierta estructura que satisfagan unas restricciones determinadas [30].

Es en el siglo XX con el advenimiento de las computadoras que fue posible el análisis sistemático de los procesos y los algoritmos utilizados para generar permutaciones y combinaciones masivas. Además el análisis combinatorio busca principalmente determinar la existencia de configuraciones finitas y, si existen, encontrar el número posible de tales configuraciones [4].

III. Teoría de Conjuntos

En el siglo XIX emerge la teoría de conjuntos gracias a los estudios de George Cantor (1845 – 1918). A través de la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal de los subconjuntos y partir de estos viene ligado el problema de demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito dado y que satisfacen ciertas condiciones. Entonces se podría decir que la teoría de conjuntos con el formalismo moderno puede ser otra presentación del conteo hacia la combinatoria[31].

Un conjunto es una colección de objetos considerada como un todo, estos objetos se llaman elementos que cumplen una propiedad; se dice entonces que un conjunto es una multiplicidad considerada como la unidad $\{A_1, A_{2,} A_3 A_n\}$[32].

Existen dos formas de asignar los conjuntos; extensión y por comprensión, para expresar que el conjunto K consta de los elementos {a, b, c} escribimos $K = \{a, b, c\}$; con ello se da la **extensión** del conjunto K al enunciar cada una de las unidades que lo componen, este método es el más frecuente al designar para pocos elementos. Por otra parte los conjuntos infinitos solo pueden definirse por **comprensión;** es decir dando un criterio que permita reconocer para cada elemento si pertenece o no al conjunto[33] .

Los axiomas formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, en1908, son un sistema axiomático concebido para formular la teoría de conjuntos[31].

Axioma de extensionalidad.

$$\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Y} \qquad (1)$$

Axioma del conjunto vacío.

$$\exists \emptyset \mid \forall a(a \notin \emptyset) \qquad (2)$$

Axioma del conjunto pares

$$\forall x, y \mid \exists \mathrm{z};\ \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y) \qquad (3)$$

Axioma del conjunto unión.

$$\forall x \mid \exists \mathrm{y}\ \forall a(a \in y \leftrightarrow\ \exists \mathrm{z}(\mathrm{z} \in x\ \wedge\ a \in z) \qquad (4)$$

Axioma del conjunto potencia.

$$\forall x \mid \exists \mathrm{y} \forall z(z \in y\ \leftrightarrow \forall a(a \in z \rightarrow a \in x) \qquad (5)$$

Esquema axiomático de especificación

$$\forall x \mid \exists \mathrm{y} \forall a\big(a \in y \leftrightarrow\ a \in x \wedge (a)\big) \qquad (6)$$

Esquema axiomático de reemplazo

$$\forall a, \exists \mathrm{b} \mid (\forall x \in a \exists \mathrm{y} \in b \wedge (x, y) \qquad (7)$$

Axioma de infinitud.

$$\exists \mathrm{x} \mid \emptyset \in x \wedge (\forall y \in x{:}\, S(y) \in x \qquad (8)$$

Axioma de regularidad.

$$\forall x \in y \mid y \in x \wedge \mathrm{x} \cap = \emptyset \qquad (9)$$

Lema de Zorn

$$\forall x \exists \mathrm{f}{:}\, \mathrm{x} \rightarrow \bigcup x\, \forall a(a) \in x \wedge a \neq \emptyset \rightarrow \mathrm{f}(a) \in a \qquad (10)$$

Definición: La unión de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto;

$$A\ \cup \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \ \mathrm{x}\ \in\ \mathrm{B}\ \} \qquad [32]\ (11)$$

$$A \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\ \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}; \qquad (12)$$

Definición: La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto:

$$A\ \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\ \wedge\ \ \mathrm{x}\ \in\ \mathrm{B}\ \}\ \ [32]\ (13)$$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\ \subset \mathrm{B} \qquad (14)$$

Se cumplen las siguientes Propiedades para la unión e intersección de dos conjuntos cualesquiera[33]:

Conmutativa de la unión:

$$A \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A} \qquad (15)$$

Asociativa de la unión:

$$(A \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = A \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \qquad (16)$$

Conmutativa de la intersección:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \qquad (17)$$

Asociativa de la intersección:

$$A \cap (\mathrm{B}\ \cap \mathrm{C}) = (A \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} \qquad (18)$$

Distributiva de la intersección:

$$A \cap (\mathrm{B}\ \cap \mathrm{C}) = (A\ \cap \mathrm{B}\ ) \cup (A \cap \mathrm{C}) \qquad (19)$$

Distributiva de la unión:

$$A\ \cup (B \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) \qquad (20)$$

Idempotente en la unión:

$$A \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \qquad (21)$$

Idempotente en la intersección:

$$A \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \qquad (22)$$

Elemento neutro unión:

$$A \cup \emptyset = \mathrm{A} \qquad (23)$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Elemento neutro de la intersección:

$$A \cap U = A \quad (24)$$

Inverso de la unión:

$$A \cup \bar{A} = U \quad (25)$$

Elemento inverso de la intersección:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (26)$$

Dominación

$$A \cup U = U \quad (27)$$

Dominación

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (28)$$

Absorción en la unión:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (29)$$

Absorción intersección:

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (30)$$

Sea X el conjunto universal y A un conjunto arbitrario el **complemento** del conjunto A es el conjunto:

$$A^c = \{x | x \in X, x \notin A\} \text{ [32]} \quad (31)$$

Propiedades:

$$(A^c)^c = A \quad (32)$$

$$A \cup A^c = X \quad (33)$$

$$A \cap (A^c) = \Phi \quad (34)$$

De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^C (A \cap B)^c = A^c \cup B^C \quad (35)$$

De Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^C \quad (36)$$

La diferencia entre los conjuntos:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad (37)$$

Si:

$$A\text{-}B = A \cap B^C \rightarrow A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad (38)$$

Demostración:

$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = (A^c \cup (B \cap C))^c$;
$= ((A^c \cup B) \cap ((A^c \cup C))^c = (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cup C)^c$;
$(A \cap B^C) \cup (A \cap C^c) = (A - B) \cup (A - C)$.

IV. Subconjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Donde A está contenido en B o que es un subconjunto de B, y lo notaremos por A ⊆ B, si cada elemento de A es un elemento de B; es decir, A ⊆ B ⟺ ∀x; (x ∈ A⇒ x ∈ B). También puede decirse que B contiene a A:

$$B \supseteq A. \text{ [33]} \quad (39)$$

En caso contrario cuando un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B se tiene:

A ⊈ B ⟺ ¬(A ⊆ B); ⟺ ¬ [∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ B)]; ⟺ ∃x: [¬(x ∈ A =⇒ x ∈ B)]; ⟺ ∃x: [¬ (¬(x ∈ A) ∨ (x ∈ B))]; ⟺ ∃x: [¬x ∈ A) ∧ ¬(x ∈ B)]; ⟺ ∃x: (x ∈ A ∧ x /∈ B). (40)

Si A ⊆ B y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A está estrictamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota por:

De (32) se deduce A ⊂ B. A ⊂ B ⟺
A ⊆ B ∧ [∃x: (x ∈ B ∧ x ∈/ A)] (41)

Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera.
A ⊆ U; x ∈ A ⇔ x ∈ U, ∀x (x ∈ A ⇔x ∈ U) ∴ A ⊆ U.

Sea A un conjunto cualquiera; entonces:
∅ ⊆ A.; x ∈ ∅ ⇔ x ∈ A, ∀x (x ∈ ∅ ⇔ x ∈ A) ∴∅ ⊆ A (42)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U:

A = B ⇔ A ⊆ B y B ⊆ A.

Siendo demostrado como:

A = B ⇔ A ⊆ B ∧ B ⊆ A;
(A = B ⇔ A ⊆ B) ∧ (A = B⇔ B ⊆ A)
A = B ⇔ A ⊆ B ∧ B ⊆ A;
"Si." A ⊆ B ∧ B ⊆ A ⇔ A = B:

En efecto, (A ⊆ B) ∧ (B ⊆ A) ⇔
[(∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ B)] ∧ [(∀x (x ∈ B ⇔ x ∈ A)];
A = B (43)

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U.

Si A ⊆ B y B ⊆ C; entonces: A ⊆ C [32].

Sea x un elemento arbitrario del universal U de A ⊆ B, se sigue que:

x ∈ A ⇔ x ∈ B
De B ⊆ C, ∴ x ∈ B =⇒ x ∈ C.
x ∈ A ⇔ x ∈ C
∀x (x ∈ A ⇔ x ∈ C) ∴A ⊆ C
De (1) A = B ⟺ ∀x [(x ∈ A =⇒ x ∈ B) ∧ (x ∈ B ⇔ x ∈ A)] (44)

V. Funciones

Definición:

Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano de A y B denotado por AxB es el conjunto:

$$AxB = \{(a, b) | \ a \in A \ \wedge \ b \in B\} \text{[34]} \quad (45)$$

Dada una pareja ordenada se tiene por definición $(a, b) \in AxB \leftrightarrow (a \in A \ \wedge \ b \in B)\}$ y sean X y Y conjuntos[32].

Una relación R de X en Y es una pareja ordenada *(R,XxY)*donde $R \subseteq XxY$.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Si R es relación X en Y =(x,y)[32].

Una función es una relación binaria F que está sujeta a ciertas condiciones y es uno de los conceptos de relevancia en matemática. Las funciones permiten conocer propiedades de conjuntos a través de otros mediante la propiedad:

$F: \{\forall\, x \in dom(F)\ \exists\, y| < x, y > \in F\}$[34]. (46)

Se denota como y=F(x); $\therefore$ Im(F) $= \{\mathrm{F}(x)|x \in \mathrm{Dom(F)}\}$, se dice que F es función de A en B y se escribe: F: A $\rightarrow B$.

Si $Dom(F) = \{A, Im(F) = F[A] \subseteq B\ VF\}$es una función y se indica que B es el codominio o contra dominio de F; ya que $Im(F) \subseteq B$ entonces el contradominio de una función es cualquier conjunto que contenga a la imagen.

En otras palabras una función de F de $A \rightarrow B$ es una correspondencia entre elementos de A y elementos de B tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de y [32].

Para cada conjunto $X, \nabla x = \{(x, x)|x \in X\}$ es una función de x en x, llamada función identidad. Sean X, Y dos conjuntos donde $y_0 \in Y$ un elemento fijo F={(x, y_0) $|x \in X\}$es una función de X en Y llamada función constante.

F es uno a uno o inyectiva $\leftrightarrow y \in Im(F) \exists x| < \mathrm{x, y} > \in \mathrm{F} \therefore$ $F(x) =;, \rightarrow x, z \in Dom(F) y\ x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$;

o bien si:

$\{x, z \in Dom(F) \wedge \mathrm{F(x) = F(z)} \rightarrow \mathrm{x = z}\}$[35].

Una función F: X $\rightarrow Y$ es suprayectiva si la: $\mathrm{I}m(F) = Y$.

Debido que para cualquier función F: X $\rightarrow Y$ siempre se tiene que $Im(F) \subseteq Y$ será razón suficiente que $Y \subseteq Im(F) \subseteq \rightarrow$ $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X|F(x) = y$.

Una función es biyectiva si $\leftrightarrow$es inyectiva y suprayectiva, donde todo elemento del codominio de una función F es imagen de un solo elemento del dominio de la función[34].

Principio aditivo y multiplicativo:

Estos dos principios son los dos más fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio. Algunos autores toman estos principios como parte de los axiomas del análisis combinatorio[36].

Teorema1.2.1 (principio aditivo):

Sean A y B dos conjuntos finitos disjuntos, es decir A $\cap$ B $\neq \emptyset$; $\rightarrow$ |A $\cup$ B |= |A | $\cup$ | B|. $\neq \emptyset$; si un suceso A puede ocurrir de n maneras y otro suceso B puede ocurrir de m maneras y no pueden ocurrir ambos simultáneamente; entonces el suceso A o B puede ocurrir de m+n maneras[37].

Demostración:

Séase $|A| = n\ y\ |B| = m$ existe una biyección en $A\ y\ \mathbb{N}_n$ y otra biyección entre $B\ y\ \mathbb{N}_m$.

Por lo tanto $|A| + |B| = m + n$ existe una biyeccion entre $A \cup B \wedge \mathbb{N}_{n+m}$.

Sea h: A $\cup$ B $\rightarrow \mathbb{N}_{mn+m}$ |

$$h(x) = \begin{cases} h(i) & si\ i \leq n \\ g(i-m) & si\ m < i \leq m+n \end{cases}$$

$f: \rightarrow \mathbb{N}_n \rightarrow$A $\wedge$ $g: \rightarrow \mathbb{N}_n \rightarrow$B$\therefore$ |A | $\cup$ |B| $= m + n$

Teorema 1.2.2 si $A_1, \ldots\ldots\ldots A_n$ son conjuntos finitos disjuntos a pares $n > 1, \rightarrow$ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots A_n| = |A_1| + |A_2| \ldots\ldots |A_n|$.

Demostración por inducción:

En el caso de n=2, $\rightarrow$ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots . A_n| = |A_1| + |A_2| \ldots\ldots |A_n| \rightarrow$ si se toma B=$A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots A_n \rightarrow$ $B \cap A_{n+1} = \emptyset \therefore |B \cup A_{n+1}|$=$|B| \cup$ $|A_{n+1}|$=$|A_1| + |A_2| \ldots\ldots |A_n| + |A_{n+1}|$.

Ley de la tricotomía

Dado dos números reales a y b se cumple una justamente una de las siguientes propiedades[35] $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Teorema1.3 (*principio multiplicativo*) sean A y B conjuntos finitos cualesquiera $AxB = \{(a, b); a \in A, b \in B\} \rightarrow$|AxB| $=$ |A| . |B|[36].

Demostración:

Sean A= $\{a_{1,} a_{2,\ldots\ldots\ldots\ldots} a_{n,}\}$ y B= $\{b_{1,} b_{2,\ldots\ldots\ldots\ldots} b_{n,}\}$ el producto cartesiano en una matriz AxB. Si se tienen dos conjuntos de k y n elementos respectivamente y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, se puede hacer de k x n maneras[37].

Debiendo:

$$\begin{pmatrix} (a_{1,} b_1) & (a_{1,} b_2) & \cdots & (a_{1,} b_m) \\ (a_{2,} b_1) & (a_{2,} b_2) & \cdots & (a_{1,} b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n,} b_1) & (a_{2,} b_2) & \cdots & (a_{n,} b_m) \end{pmatrix}$$

La cual es de dimensión $n.m$ =$|A| + |B|$

Teorema1.3

Sean $\{A_1 \ldots\ldots\ldots . A_n\}$ conjuntos finitos cualesquiera $|A_1 \mathrm{x}\, A_2 \mathrm{x} \ldots\ldots A_n| = |A_1| . |A_2| \ldots\ldots |A_n|$

Demostración por inducción sobre n sea: $|A_1 \mathrm{x}\, A_2 \mathrm{x} \ldots\ldots . \ldots\ldots A_n| = |A_1| . |A_2| \ldots\ldots |A_n|$ siendo B=$A_1 \mathrm{x} \ldots\ldots\ A_n \rightarrow$B x A_{n+1}=$|B| . |A_{n+1}| =$ $|A_1| . |A_2| \ldots\ldots\ldots |A_n| . |A_{n+1}|$

Si un objeto puede escogerse entre m posibles:

Principio de inclusión exclusión:

Sean A y B dos conjuntos finitos:

$|A \cup B| = |A| + |B|$-$|A \cap B|$

Si tenemos la colección $A_i (1 \leq i \leq n)$ [36].

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots . \cup A_n| - |\sum_{i=1}^{n} |A_i| \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq i < j \leq n}} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq i < j < k \leq n}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \ldots . \cap A_n|$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

VI. CÁLCULO COMBINATORIO

Permutaciones

Una permutación de algunos objetos es un ordenamiento o arreglo lineal particular de los objetos: P (n, k) y cuenta dos cosas simultáneamente: la cantidad de formas de elegir y ordenar k de n objetos[39]. Un caso especial útil es k = n en el que simplemente estamos contando el número de formas de ordenar todos los n objetos; esto es: $n\,(n-1)\ldots(n-n+1) = n!$, lo anterior se formaliza con el uso del lenguaje de las funciones matemáticas: como una función biyectiva de I_n en un conjunto de n elementos. Si A es un conjunto finito, toda función inyectiva de A en A es biyectiva[36].

Sea $A = \{a_1 \ldots\ldots a_n\}$; $F{:}A \rightarrow A$ es una permutación de A, en estas permutaciones intervienen todos los elementos. El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1), r \leq n.$$

El número total de permutaciones de n objetos diferentes tomados de n en n está dada por:

$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1 = n!$[38].

Permutaciones con repetición: se llama permutación con repetición de n elementos distribuidos en k grupos de $\{a_1, a_2, \ldots\ldots a_{k-1}, a_k\}$ elementos indistinguibles $\{a_1 + a_2 + \cdots\ldots a_{k-1} + a_k$=n$\}$, las configuraciones con n elementos excluyendo las reordenaciones son:

$PR_n^{a_1,a_2,\ldots\ldots a_{k-1},a_k} = \frac{n!}{a_1 \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{k-1}! \cdot a_{k!}}$ [39].

Permutaciones circulares:

Una permutación circular de orden $r \leq n$ de n objetos es una disposición de r en r, *posiciones* en la circunferencia. En r elementos de $\binom{n}{r}$ son las formas distintas de colocarlos, con los elementos:

$a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots\ldots, a_{f(r)}$tendremos $r!$ configuraciones en la circunferencia, al trasladar los elementos una posición a la derecha se tiene:

$a_{f(1)}a_{f(2)}\ldots\ldots a_{f(r)} = a_{f(2)}a_{f(3)}\ldots\ldots a_{f(1)} =$
$a_{f(r)}a_{f(1)}\ldots\ldots a_{f(r-1)} \therefore$
$\binom{n}{r}\frac{r!}{r} = \binom{n}{r}(r-1)!$[36].

Combinaciones

Se llaman combinaciones de elementos A= $\{a_1 \ldots\ldots\ldots a_n\}$ tomados de n en n a los subconjuntos de n elementos del conjunto A se denota como:

C(n,m) =C$\binom{n}{m}$ donde $0 \leq n \leq m$.

Para calcular C$\binom{n}{m}$ se busca cada aplicación inyectiva $f: \mathbb{N}_m \rightarrow m \subset A = S\{f(1), f(2)\ldots\ldots, f(k)\}$[38].

También cada uno de los diferentes grupos tomando todos o parte de los elementos del conjunto, sin considerar el orden de los elementos tomados, se les llama combinación.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por $C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}$ $r \leq n$ multiplicando por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$ Se obtiene:

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r)!}{r!\ (n-r)!}.$$

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r puede obtenerse:

$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $r \leq n$ [38].

Combinaciones con repetición:

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$un conjunto de n elementos. Una combinación con repetición de n elementos tomados de k en k este conjunto equivale a una lista ordenada de longitud k donde estos se pueden repetir y existe una correspondencia entre las combinaciones de orden k y las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\ldots x_1 = k$ cada $x_1 \geq 0$ es a_i es una función biyectiva $CR(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Si $n, k \rightarrow CR(n,k) = CR(n-1,k) + CR(n,k-1)$;
$CR(n,1) = n \wedge CR(1,k) = 1$
$\exists a_1$,se toma elementos de k-1 en k-1$\therefore$
$CR(n,k) =+ CR(n-1,k) + CR(n,k-1)$.
Si k≠1,n≠1;
$CR(n,1) = n \wedge CR(1,k) = 1$
$CR_k^n = R_{k+n-1}^n = \binom{k+n-1}{n} = \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!}$ [39].

Variaciones

Sea X un conjunto de k elementos y otro conjunto Y de n elementos:

$S = \{f: X \rightarrow Y; f\ inyectiva\}$;
la aplicación de la función es:
$f(x_1), f(x_2)\ldots\ldots\ldots f(x_n) \rightarrow f(x_1) \in$Y.
$f(x_2) \in$ Y\$\{f(x_2)\}$ = {y ∈ Y; y ≠ $f(x_1)$}
$f(x_3) \in$ Y\$\{f(x_1), f(x_2)\}$ =
{y ∈ Y; y ≠ $f(x_1)$, y ≠ $f(x_2)$}
$f(x_k) \in$ Y\$\{f(x_1), \ldots\ldots f(x_{k-1})\}$ =
{y ∈ Y; y ≠ $f(x_1)\ldots., \neq f(x_{k-1})$}

El total de aplicaciones biyectivas de X →B se llaman variaciones de n elementos tomados de k, por el principio del producto:

$V(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1) =$
$\frac{n!}{(n-k)!}$ [38].

Variaciones con repetición:

Sea un conjunto de m elementos con la notación:

$C = \{c_1, c_1, \ldots, c_m\}$ se pueden formar;$X_n = \{(c_{i1}, c_{i1}, \ldots\ldots c_{in}): c_{i1} \in C, j = 1, \ldots\ldots, n\}$ el número de elementos de X_n,con repetición de m elementos tomados de n en $n \therefore X_{m=} m^n$[39].

El factorial de un entero positivo n lo describe Christian Kramp en 1808[40] como**:**

Para cada $n \in \mathbb{N}$ factorial será $n! =$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-1)n = \prod_{k=1}^{n} k$;

$$n! = \begin{cases} 1, & si\ n = 0 \\ n-1!\,n & si\ n > 0 \end{cases}$$

Propiedades

$n! = n\,(n-1)¡$; $n \geq 2$;
$Si\ n! = m!; \Leftrightarrow n = m\ \forall\, n, m \in Z^+$-{1};
n (n!) = (n + 1)! − n!

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Teorema del binomio

El desarrollo de la potencia *n-ésima* (siendo n, entero positivo) de un binomio[37].

Sea 1≤ m ≤ n-1 → $C\binom{m-1}{n-1} + C\binom{m}{n-1} = C\binom{m}{n}$.

Demostración:

$!C\binom{m}{n-1} + C\binom{m-1}{n-1} = \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1)!} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$

$= \frac{(n-1)!(\mathrm{n-m})}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!\mathrm{m}}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(\mathrm{n-m})+(\mathrm{n-1})!\mathrm{m}}{m!(n-m)!}$

$= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{m}{n}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, y cualesquiera números reales *a,b* se tiene que : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, a^{n-i} \cdot b^i$ ·

Demostración por inducción sobre *n:*

$n = 0, (a+b)^0 = 1 \wedge \sum_{i=0}^{n} C_o^i\, a^{n-i} \cdot b^i = C_0^0 a^0 \cdot b^0 = 1 \therefore (a+b)^0 = \sum_{i=0}^{0} C_o^i\, a^{0-i} \cdot b^i$.

Para n -1≥ 0, $(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$

$= (a+b)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$

$= a\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i + b\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^i$

$= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-1-i} \cdot b^{i+1}$

Como:

$C_{n-1}^n = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, a^{n-i} \cdot b^i = \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i-1}\, a^{n-i} \cdot b^i$

Se define:

$$C_{n-1}^{-1} = 0 \rightarrow (a+b)^n \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^i\, a^{n-i} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n} C_{n-1}^{i-1}\, a^{n-i} \cdot b^i$$

$= \sum_{i=0}^{n} (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1})\, a^{n-i} \cdot b^i$

$\therefore (a+b)^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, a^{n-i} \cdot b^i$

Coeficiente binomial

El número de subconjuntos de k elementos a partir de un conjunto *n* se denota $\binom{n}{k}$. Los números $C_{(n,k)}$ se conocen como coeficientes binomiales donde $C_{(n,k)} = 0;\ si\ k > n$:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots\ldots (n-k) + 1; \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

El cuál es el coeficiente del termino $x^{n-k}y^k$ obtenido al desarrollar $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

En el libro "*raité du triangle arithmétique*" (Pascal, 1654) estudia lo que hoy se conoce como triángulo de Pascal que es un arreglo de números donde la posición k en la fila n del triángulo de Pascal es igual al coeficiente binomial $\binom{n}{k}$[36].

Cumple con las siguientes propiedades[37]:

Sean ∀n,$k \in Z^+$|n ≥ k :

. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$;

. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$;

. $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$;

. $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots \ldots\ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$;

. $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots \ldots\ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$;

. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n$;

. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

VII. Didáctica de la combinatoria mediante Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

A través del enfoque didáctico ABP se proponen problemas combinatorios, donde se pretende desarrollar habilidades cognitivas como; conjeturas, generalización la optimización y el pensamiento sistemático, además habilidad para identificar, analizar y solucionar problemas.

Una de las principales características del ABP está en fomentar en el alumno el aprendizaje autodirigido y el pensamiento crítico, además el conocimiento sobre los contenidos en la propia experiencia de trabajo, donde él tiene la posibilidad de analizar en la práctica aplicaciones en torno al problema. Se pretende que el estudiante se involucre en el proceso de aprendizaje propiciando su interés para enfrentarse a problemas contextualizados. El enfoque de ABP permite que bajo el principio de usar problemas centrados en el aprendizaje como punto de partida, el alumno desarrolle competencias tanto de la toma de decisiones como en el momento de proponer estrategias de solución. Para la adquisición y la integración de los nuevos conocimientos[41].

Mediante el ABP el alumno empleará modelos matemáticos que le permitan enfrentarlo a situaciones reales donde la actividad gire en torno a la discusión de un problema y el aprendizaje surja de la experiencia sobre ese problema, para traducirlo en un lenguaje matemático donde después le permitirá modelarlo ,simularlo y permita la reflexión sobre su propio aprendizaje. En esta metodología, el docente tiene un rol claramente definido:

Es el facilitador del aprendizaje y su labor es orientar, guiar, moderar y facilitar una adecuada dinámica de grupo, es quien custodia el proceso de aprendizaje del grupo y guía el descubrimiento. Tiene la responsabilidad de buscar, diseñar y plantear problemáticas con un alto grado de significatividad, debe contribuir en el esclarecimiento de las dudas, ayudar a plantear situaciones problema, sugerir y evaluar estrategias de solución así como determinar las etapas y metas de la experiencia asesorando en el diseño de las alternativas de solución del problema[42].

Polya en su libro ¿Cómo plantear y resolver problemas? (1945)[43]. determina una propuesta la cual está enfocada a la forma como se deben asumir y enfrentar los problemas al interior del estudio de la matemática. Sus aportes se encaminan a orientar acerca del manejo de dichas situaciones en los procesos educativos, él comparte, además, la idea de que las estrategias y preguntas de un experto podrían ser modeladas por los docentes en el salón de clase.

Propone un plan, en el cual como primera fase es la comprensión del problema, en esta se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones iniciales del problema, se formulan preguntas como: ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?, como segunda fase; es la concepción de un plan y en esta se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

análoga a la que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución por medio de estrategias o algoritmos en donde propone formular preguntas: ¿Se conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? ¿Se puede plantear el problema de otra forma? .En la tercera fase es la ejecución de este plan y en esta se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema así como su demostración y la generalización del problema. La última fase es la visión retrospectiva, en donde a idea fundamental de esta fase, es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida y si este mismo algoritmo se puede aplicar en algún otro problema.

La implementación basada en el método heurístico de Polya ayuda a resolver problemas combinatorios contextualizados.

Esta concepción permite en principio de colocar los problemas unos con relación a otros, a condición de tener una axiomática conveniente de la teoría por enseñar: las discusiones sobre la selección de la mejor axiomática sustentan la mayor parte de las investigaciones sobre los programas[43].

El pensamiento sistémico (PS) ayuda a construir un marco conceptual que permite representar problemas dentro de varios subsistemas o elementos interrelacionados llamados patrones ,la implementación permite el estudio de cualquier fenómeno y sistema enfatizando las relaciones entre las partes del mismo, en lugar de ver el sistema como un todo, este mismo comienza con la articulación del problema ,el análisis del sistema y finaliza con el uso de modelos que permitan la imitación o proceso o sistema del mundo real [44].

El PS es una herramienta dentro de la combinatoria donde para abordar diferentes problemas, estos se pueden contemplar como sistemas, por medio de la identificación de reglas y patrones que permitan llegar a su generalización[45].

VIII. Problemas de aplicación

Problemas:

1)*Se quiere elegir a un comité de 3 personas de un total de 20 personas de las cuales una debe ser presidente, el otro secretario y un tesorero ¿De cuantas maneras se puede elegir dicho comité?*

Este problema típico de combinatoria donde orden de cada uno de los elementos es fundamental; esto es lo mismo que dar una función I_3 {1, 2,3}, pero se tiene que tomar en cuenta que no puede ser cualquier función, ya que la persona no puede ocupar dos cargos a la vez, esto es si se eligió a las personas A, B, C, ocupando los cargos de presidente (1), secretario (2) y tesorero (3)respectivamente; la función correspondiente a esta elección es $f(x) : \{1,2,3\} \to G$,donde G es el conjunto de las 20 personas y $f(1) = A, f(2) = B\ y\ f(3) = C$ donde $f(1) \neq f(2);\ f(1) \neq f(3)\ y\ f(2) \neq f(3)$, la función debe ser inyectiva.

Definición 1:

Las ordenaciones de n elementos tomados de m en m son las funciones inyectivas $I_3\{1,2 \ldots . m\}$ en el conjunto de estos n elementos es O_n^m.

Definición 2:

Las ordenaciones con repetición de n elementos tomados de m en m son las funciones de I m del conjunto de esos elementos y al número total lo detonaremos OR_n^m.

Proposición 1.2 si A es un conjunto con *m* elementos y B con un conjunto de *n* elementos, el número de maneras de escoger un elemento de A y un elemento de B es *m.n* por el teorema 1.3 sea A = $\{a_{1,\ldots\ldots} a_n\}$ un conjunto de *n* elementos, *n*≥ 1 ,n(n-1) parejas ordenadas de $(a_{1,\ldots\ldots} a_j)$ de elementos A $a_i \neq a_j$.

Demostración:

Sea $i \in I_n$ fija y sea $B_i = A - \{a_i\}$ el número de elementos de $B_i\}$ es *n-1*

$\{(a_i, a_i\} \in AxA | a_i \neq a_i\} =$

$\cup_{i=1}^{n}(\{a_i\}\ x\ B_1) y(\{a_i\}\ x\ B_1) \cap (\{a_j\}\ x\ B_j) = \emptyset$ Si *i≠j*

$$card \bigcup_{i=1}^{n}(\{a_i\}\ x\ B_1) = \sum_{i=1}^{n} card(\{a_i\}\ x\ B_1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(n-1) = (n-1)$$

Hay $(n-1)$parejas ordenadas. El número de maneras de escoger la imagen de 1 es n el número de elementos de dar una función inyectiva de I_2 *en A*={ (*a*,*b*)∈ *AxA* |a ≠ b},la imagen de 1=*a* y la imagen e 2=*b:*

$f: \{I_2 \to A | f\ es\ inyectiva\} \to A = (a, b) \in AxA | a \neq b\}$

Definida F$(f) = (f(1), (f(2))$ es biyectiva:

O_n^2=n(n-1)=$\frac{n!}{(n-2)!}$

Considerando $f: I_3 \to A$ determinará:

$(a_1, a_2, a_3)\ B =$

$\{(a_1, a_2, a_3) \in AxAxA | a_1 \neq a_J$ si $i \neq j$ *i=1,2,3}*

Habrá entonces O_n^3=$O_n^2\ (n-2) = n(n-1)(n-2)\frac{n!}{(n-3)!}$

Funciones inyectivas $I_3 \to A$.

$\therefore O_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2 \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} =$

$10 \cdot 19 = 190$ maneras.

2) a)¿Cuántos números de seis dígitos, significativos, se pueden escribir en un sistema binario?

b) ¿Cuántos hay que contengan la sucesión 01?

Solución:

El primer dígito siempre es 1, por lo tanto tenemos que ver las formas posibles de formar listas de 5 elementos con los dígitos 0 y 1: el total es 2^5= 32

Si queremos ver cuántos de éstos contiene la sucesión 01, esta sucesión puede ocupar una de las siguientes posiciones:

1 0 1 _ _ _, 1 _ 0 1 _ _, 1 _ _0 1 _, 1 _ _ _ 0 1.

Cada uno de estos casos tiene tres espacios vacíos, que se pueden rellenar con cualquiera de los dígitos 0 o 1.

Por lo tanto cada uno produce 2^3 números.

Llamamos A_1 a los números del tipo 1 0 1 _ _ _, A_2 a los del tipo 1 _ 0 1 _ _, A_3 a los del tipo 1 _ _0 1 _, yA_4 a los del tipo 1 _ _ _ 0 1.

Tenemos entonces, por el principio de inclusión–exclusión:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4|$.

Se tiene:

$|A_i| = 2^3$, y $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4|| = 2$.

Por lo tanto:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.| = 4 \times 2^3 - 3 \times 2 = 32 - 6 = 26$.

3)¿Cuántos divisores positivos tiene el número 29338848000,¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

Si d es un divisor de 29338848000 =

$2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \therefore d =$

$2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ con:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in A_1 x A_2 x A_3 x A_4 x A_5$ donde:

$A_1 = \{0,1,2 \dots ,8\}, A_2 = \{0,1,2 \dots ,5\}, A_3 = \{0,1,2,3\}, A_4 = \{0 ,1 ,2 ,3 \}, A_5 = \{0,1\}$.

El número de divisores de 29338848000 es $|A_1 x\, A_2 x\, A_3 x\, A_4 x\, A_5|$=9· 6 · 4 · 4 · 2.

Si $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ es múltiplo de 99→$\alpha_2 \geq 2 ; \alpha_5 = 1$.

En total, el número de divisores múltiplo de 99 es: $|A_1 x(A_2 - \{0,1\}) x\, A_3 x\, A_4 x\, A_5 - \{0\}| =$

9· 4 · 4 · 4 · 1

39=3·13 no es divisor de 29338848000 ∴ 0

4) Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones {1, 0}

a) ¿Cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores?

b) ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

Solución:

a) El circuito puede encontrarse en $VR_{2,10} = 2^{10}$ en estados distintos

b) El número de estados con tres interruptores en posición 1 es en $PR_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$.

5) Se considera el conjunto {1, 2, . . . , 20}. ¿De cuántas formas se puede elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

Solución:

Si hacemos una elección de cinco elementos $\{\{x_1, x_2 x_3 x_4 x_5\}$ ordenados de menor a mayor, entre los que no hay dos consecutivos, resulta:

$x_5 > x_4 + 1$, $x_4 > x_3 + 1$, $x_3 > , x_2 + 1$, $x_2 > x_1 + 1$, y por tanto, el conjunto $\{x_1 , x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4\}$ está formado por cinco elementos distintos. Y recíprocamente, dado un conjunto $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ de cinco elementos distintos, que podemos suponer ordenados de menor a mayor, resulta que el conjunto $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4\}$ de cinco elementos entre los que no hay dos consecutivos;$\{\{x_1, x_2 x_3 x_4 x_5\}$, $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ formados por cinco elementos distintos. El valor mínimo de $x_1$es 1, y el valor máximo de x_5 es 20, por lo tanto el valor mínimo de y_1 es 1, y el valor máximo de y_5 es 20 − 4 = 16. El número de conjuntos de cinco elementos es $\binom{16}{5}$= 4368.

6) ¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son primos?

Solución: Los números primos que aportarán números compuestos son: 2, 3, 5 y 7, ya que 11^2 = 121 > 120. Podemos entonces calcular los números primos menores que 120 que son múltiplos de 2, 3, 5, ó 7; el número de elementos de este conjunto es:

$|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = (|S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|) - (|S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_5| + |S_2 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5| + |S_3 \cap S_7| + |S_5 \cap S_7|) + (|S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5 \cap S_7|) - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7|$

$$=\left(\frac{120-1}{2} + \frac{120-1}{3} + \frac{120-1}{5} + \frac{120-1}{7}\right) - \left(\frac{120-1}{6} + \frac{120-1}{10} + \frac{120-1}{14} + \frac{120-1}{15} + \frac{120-1}{21} + \frac{120-1}{35}\right) + \left(\frac{120-1}{30} + \frac{120-1}{42} + \frac{120-1}{70} + \frac{120-1}{105}\right) - \frac{120-1}{210} =$$

138-53+7-0=92

De éstos tenemos que excluir los números 2, 3, 5 y 7, y como el número 1 no es primo, el número de enteros primos positivos menores que 120 es:

119 − (92 − 4) − 1 = 30.

Podemos comprobar el resultado, ya que los enteros primos pedidos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

7) En los lenguajes de programación se utilizan identificadores para hacer referencia a varios objetos: constantes, variables, funciones, Normalmente un identificador está formato por una serie de caracteres, letras del alfabeto ('a',.., 'z', 'A',.., 'Z') y dígitos numéricos ('0',.., '9') empezando siempre por una letra. Por ejemplo, a1, Jet, NUM, n36, AddNode son identificadores válidos, pero 1a, 3jda no se considerarían validos porque empiezan por un digito o contienen caracteres que no son letras ni dígitos.

(a) ¿Cuantos identificadores de 8 caracteres podemos formar? ¿Y si todos los caracteres deben ser diferentes?

(b) Si consideramos identificadores con un máximo de 6 caracteres, ¿cuántos identificadores podemos formar con todos los caracteres diferentes?

(c) Si se consideran equivalentes las letras mayúsculas y minúsculas, ¿cuántos identificadores con un máximo de 6 caracteres diferentes podremos formar?

(d) ¿Cuántos de los identificadores del apartado anterior tendrán, al menos, una vocal?

Solución: Suponemos que tenemos 26 letras minúsculas, 26 mayúsculas y 10 dígitos:

(a) El número total de identificadores de 8 caracteres serán:

52 × VR(62, 7) = 52 × 627 = 183123959522816

Si todos el caracteres deben ser diferentes, entonces la solución será:

52 × V (61, 7) = 52 × 61 × 60 × 59 × 58 × 57 × 56 × 55 = 600956640.

(b) En este caso, los identificadores pueden tener longitud de 1 a 6. La solución será:

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$52\ (1 + 52(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (61, \mathrm{y})) =$
$52(1 + \mathrm{V}\ (61, 1) + \mathrm{V}\ (61, 2) +$
$\mathrm{V}\ (61, 3) + \mathrm{V}\ (61, 4) + \mathrm{V}\ (61, 5)) =$
37785374744

(c) Este caso es como el anterior pero ahora sólo hace falta considerar 26 letras y 10 dígitos:

$26(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (35, \mathrm{y}) =$
$26(1 + \mathrm{V}\ (35, 1) + \mathrm{V}\ (35, 2) + \mathrm{V}\ (35, 3) + \mathrm{V}\ (35, 4)$
$+\mathrm{V}\ (35, 5)) = 1046577376.$

(d) Calculamos, primero, cuantos identificadores no tienen ninguna vocal:

$21(1 + \sum_{y=1}^{5} \mathrm{V}\ (30, \mathrm{y})) =$
$21\big(1 + \mathrm{V}\ (30, 1) + \mathrm{V}\ (30, 2) + \mathrm{V}\ (30, 3) + \mathrm{V}\ (30, 4)$
$+ \mathrm{V}\ (30, 5)\big) =$
373457721

Sustrayendo de la cantidad del apartado anterior obtendremos el resultado deseado:
1046577376 − 373457721 = 673119655

8) ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 *que no sean capicúas?*

Consideramos que un número es capicúa si al invertir el orden de sus cifras obtenemos el mismo número. Los números naturales de una cifra son todo capicúa. No consideramos al 0 como un elemento del conjunto de los números naturales.

Números capicúa de una cifra: $A_{1=}\{1,2,3, \dots \dots ,9\}; |A_1| = 9$ meros capicúa de dos cifras; $A_{2=}\{11,22,33, \dots \dots ,99\}; |A_2| = |A_1| = 9$

Números capicúa de tres unas cifras: $|A_3| = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de cuatro cifras: $|A_2| = |A_3| = 90$

Números capicúa de cinco cifras: $|A_2| = 9 \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de seis cifras:
$|A_6| = |A_5| = 900$

En total tenemos $\sum_{i=1}^{6} |A_i| = 2 \cdot (9 + 90 + 900) = 1998$ números capicúa menores 10^6 ,por lo que el número de números naturales que no son capicúa es de :999,999-1,998=998,001.

9) Determina el número de soluciones enteras de la ecuación:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$
a) $x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$
b) $x_i > 0 \quad 1 \leq i \leq 4$
c) $x_1, x_1 \geq 5; \quad x_1, x_1 \geq 7$
d) $x_i \geq 8 \quad 1 \leq i \leq 4$
e) $x_i \geq -2 \quad 1 \leq i \leq 4$
f) $x_1, x_2, x_3 > 0; \quad 0 < x_4 \leq 25.$

a)$\binom{32+4-1}{32} = \frac{35!}{3! \cdot 32!}$
b) $\binom{28+4-1}{28} = \frac{31!}{3! \cdot 28!}$
c) $\binom{8+4-1}{8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!}$
d) $\binom{0+4-1}{0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$
$\therefore z_i = x_i + 2 \forall i = 1,2,3,4;$

Se tiene el sistema:
$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 40, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots ,4 \end{cases}$

Se tiene un total de $\binom{40+4-1}{40} = \frac{43!}{3! \cdot 40!}$;
$z_{1=} x_{1,} - 1, z_{2=} x_{2,} - 1, z_{3=} x_{3,} - 1, z_{4=} x_4 - 1$

Se tiene el sistema:
R=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots ,4 \ \wedge z_4 \leq 24 \end{cases}$
|X|=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots ,4 \end{cases}$; $\binom{31}{28}$
|A|=$\begin{cases} z_1 + z_{2+} z_{3+} z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots ,3 \ \wedge 25 \leq z_4 \end{cases} = \binom{6}{3}$
|R|=|X|-|A|=$\binom{31}{28} - \binom{6}{3}$=4475.

IX. Conclusiones

Los problemas didácticos propuestos en este trabajo, sobre cálculo combinatorio permiten realizar modelos matemáticos a través de axiomas, postulados y teoremas, para llegar a modelar situaciones reales, mediante conceptos preliminares como; variaciones, permutaciones y combinaciones.

El ABP permite fragmentar problemas en subsistemas para poder realizar conjeturas, algoritmos y finalmente proponer estrategias de solución. Sus elementos básicos son el análisis, la lógica, la construcción de patrones y la generalización. Los procesos de enseñanza-aprendizaje deben ser orientados bajo una perspectiva en la que los estudiantes tengan diferentes soluciones que posteriormente demuestren como lo plantea Polya.

Gracias a la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal sobre distintas configuraciones de objetos discretos dentro de la combinatoria, así como principios fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio, paralelamente la noción de función da sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, isomorfismo, coeficientes binomiales, permutaciones y variaciones.

La indagación histórica permite vislumbrar del proceso de transformación que sufrieron los conjuntos discretos, donde a través de las relaciones entre los elementos y sus operaciones, surge el cambio de sus estructuras.

REFERENCIAS

[1] Riordan, J. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation. (USA,2012)
[2] Bertalanffy, L. V., & Almela, J. *Teoría general de los sistemas: fundamentos, desarrollo, aplicaciones* (No. 001.5). Fondo de Cultura Económica (México, 1976).
[3]Johnsonbaugh, R. *Matemáticas discretas*. Pearson Educación. (México, 2005)
[4] Ralph P. Grimaldi. *Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Pearson Educación. (México,1998).
[5] Wilhelm, Richard. *I Ching. El libro de las mutaciones*. Traducción de D. J. Vogelmann. Prólogo de Carl Gustav Jung. Barcelona: Edhasa. ISBN 978-84-350-1902-6. (España,1960)
[6] Nam, PB y Miller, D.. *Fundamentos de Pa Kua Chang* . Publicaciones únicas. (España,1998)
OPCION 2 Too, L. y Hai, YC. *Aplicado Pa-Kua y Lo Shu Feng*

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Shui . North American Ed., Publicaciones orientales. (USA, 1993)

[7] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., «Zhu Shijie» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.

[8] [10] R. P. Grimaldi, Discrete and combinatorial mathematics, Addison-Wesley, (USA,1989).

[9] Bhaskara Acharya, II, y Bhaskara Acharya, II. Lilavati Álgebra, con aritmética y medición del sánscrito de Brahmegupta y Bhascara, traducido por HT Colebrooke (USA,1817).

OPCION 2 Sarma, K.V. Līlāvatī de Bhāskarācārya con Kriyākramakarī de Śaṅkara y Nārāyaṇa. *Hoshiarpur: Instituto de Investigación Védica Vishveshvaranand* . (USA, 1975)

[10] Simonson, S. The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag. *Dpt. of Math and Comp. Sc., Stonehill College, North Easton, MA*. (USA, 2000)

[11] Stifel, M.. *Arithmetica integra*. apud Iohan Petreium. (USA,1969)

[12] Tartaglia, N.. General trattato di numeri, et misure. Vinegia. (USA,1556)

[13] Cardano, G.. *El libro sobre juegos de azar: (Liber de ludo aleae)* . Holt, Rinehart y Winston. (USA, 1961)

[14 Vilenkin, N. I.. *De cuantas formas?: Combinatoria*. Mir. (USA,1972).

[15] Pascal, B.. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Chez Gvillavme Desprer. (USA,1978)

[16] Huygens, C.. *De ratiociniis in ludo aleae*. Ex officinia J. Elsevirii. (USA,1980)

[17]Leibniz, G.. *Dissertatio de Arte Combinatoria.* Berlin: Sämtliche Schriften und Briefe. (Alemania,1666)

[18] Bernoulli, J. *Ars conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum. (USA,1713)

[19] De Moivre, A.. *La doctrina de las posibilidades: o, Un método para calcular las probabilidades de eventos en juego* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company. (USA,1756)

[20] Laplace, P. S.. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier. (Francia,1820)

[21] Stewart, I. N.. *Galois theory*. CRC Press. (USA,2015)

[22] EULER, L. (1736): "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." Commentarii Academice Scientarum Imperialis Petropolitane 8, 128-140. (USA,2015)

[23] Ramsey, F. P.. On a problem of formal logic. In *Classic Papers in Combinatorics* (pp. 1-24). Birkhäuser Boston. (Alemania, 2009)

[24] Erdos, ″ P., Szekeres, G.: "On a Combinatorial Problem in Geometry", Compositio Math (USA,1954)

[25] Kolmogorov A.N.: Foundations o f the theory ofprobability, Chelsea, New York. (USA,1956)

[26] Pólya, G.. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta mathematica*, *68*, 145-254. (Alemania,1937)

[27] Flajolet, P., Lam, TY y Lutwak, E.. *Geometrías combinatorias* (Vol. 29). Prensa de la Universidad de Cambridge. (USA,1987)

[28] Oxley, JG. *Teoría matroide* (Vol. 3). Oxford University Press, Estados Unidos.(USA,2006)

[29] Fulton, M. W., & Fulton, W. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry* (Vol. 35). Cambridge University Press. (USA,1997).

[30] Berge, C. Principles of combinatorics. *New York*, 176. (USA,1971).

[31] Torretti, R.. El paraíso de Cantor. *La tradición conjuntista en filosofía de la matemática. Santiago de Chile: Universitaria*. (USA,1998).

[32] Amor-Montaño, J. A. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*. Las Prensas de Ciencias. (USA, 2009)

[33] Rey Pastor, J., Calleja, P., Pedro, T., & César, A. Análisis matemático: análisis algebraico: teoría de ecuaciones: cálculo infinitesimal de una variable. (USA,1952).

[34] Laveaga, C. G. *Álgebra superior: curso completo*. Universidad Nacional Autónoma de México. (México, 2014)

[35] Ortega, J. M. *Introducción al análisis matemático* (Vol. 5). Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. (España, 1993)

[36] Berman G. & Fryer K. D. Introduction to combinatorics. Academic Press. N. Y. (USA, 1972)

[37] Brualdi, R. A. *Introductory combinatorics*. Pearson Education India. (USA, 1977)

[38] MacMahon, P. A. *Combinatory Analysis, Volumes I and II* (Vol. 137). American Mathematical Soc. (USA,2001).

[39] Lian, B. *Un primer curso de matemática discreta.* Springer Science & Business Media. (USA, 2000)

[40] Ribnikov, K. *Análisis combinatorio.* Moscú: Mir. (Moscú, 1988).

[41]Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (España,2005)

[42] Sastre, G. *El aprendizaje basado en problemas* (Vol. 235004). Editorial Gedisa. (México, 2018)

[43]Pólya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. (México,1982)

Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (México,2005)

[44] Cavaleri S, Sterman J. Towards evaluation of systems thinking interventions: a case study. System Dynamics Review 13(2): pp. 171–186. (USA,1997).

[45] Checkland, P y Scholes J. Soft systems methodology: a 30-year retrospective. Systems Research and Behavioral Science Volume: 58, Publisher: Wiley, pp. 11-58. (USA,1999).

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.

Jaime William Flores Tecalco[#@]
[#]Alumno de la Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
[@]Alumno de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa.
william10_511@hotmail.com

***Resumen*- El presente artículo describe Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.**

***Palabras Clave*- geometría, formulación, método deductivo, polígonos, algoritmos.**

Abstract- This article describes an alternative for the tracing of the first ten regular polygons inscribed on a circle through deductive formula.

Keywords-geometry, formulation, deductive method, polygons, algorithms.

***Mathematical Subject Classification:* 97D40**

I. INTRODUCCIÓN

Se le puede llamar "polígono regular" a la figura geométrica que es equilátera y equiángula al mismo tiempo [1]. Podemos apoyarnos en una circunferencia, circunferencia circunscrita, para el trazado de dichos polígonos. Todo polígono regular tiene una circunferencia inscrita y una circunscrita [3].

La construcción del polígono regular consiste en la división de la circunferencia en un número de partes iguales dependiendo el polígono a tratar e unirlas al finalizar.

Para conseguir estas partes iguales, por lo regular se lleva a cabo una metodología de relaciones y trazos diferentes en cada figura geométrica ocupando compás, regla y escuadra. Por ende, cada polígono regular posee un algoritmo particular de trazado.

Desde la educación básica en nuestro país, los planes de estudio contemplan el estudio de polígonos regulares, su trazado, el cálculo de su perímetro y área; así que el propósito de este escrito es dar una alternativa a la metodología que usualmente se usa, con esto no se quiere dar a entender que el uso de fórmulas deductivas sea bueno o malo, simplemente son una opción adicional. También cabe mencionar que estas fórmulas no son nuevas sino son una derivación de relaciones geométricas de cada polígono regular.

II. PARTES DE UN POLÍGONO REGULAR

Para comenzar vamos a recapitular el conocimiento obtenido en nuestra formación escolar denotando las partes, solo las de nuestro interés en este texto, de un polígono regular. Se tomará la figura 1 como el del hexágono regular para generalizar los conceptos.

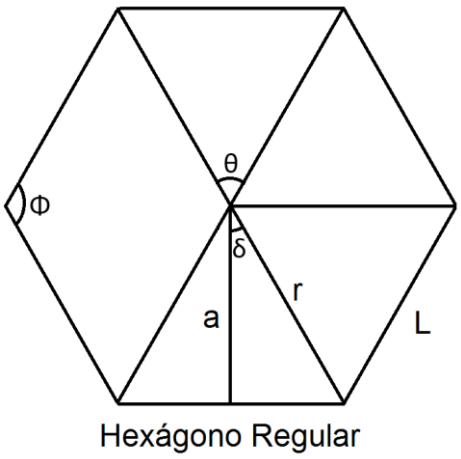


Fig. 10 Hexágono regular.

Primero denotaremos como **L** al lado del polígono regular y como **r** al radio, el cual es el segmento que une el centro del polígono con un de sus vértices. El centro de una circunferencia circunscrita es el mismo que la del polígono regular inscrito en ella [6]. Denominaremos como **a** la apotema, que es el segmento perpendicular del centro del polígono a uno de sus lados [1]. Si el número de lados de un polígono regular inscrito se aumenta indefinidamente, la apotema tiende hacia el radio como límite [3].

Un ángulo central tiene el mismo número de grados que el arco que lo intercepta, es decir, se mide por su arco interceptado [5]. El ángulo central se denotará por θ (Theta), entonces:

$$\theta = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n} \qquad (1)$$

Donde n será el número de lados del polígono regular a tratar.

Le llamaremos ángulo δ (Delta) a uno de los ángulos del triángulo rectángulo formado por **a** y **r**, por lo cual:

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$$\delta = \frac{\theta}{2} = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\delta = \frac{\pi}{n} \qquad (2)$$

Al ángulo interno se le llamará Φ (Phi), se ocupará la siguiente expresión para representarlo:

$$\phi = \frac{(n-2)}{n}180° \qquad (3)$$

La expresión (3) proviene de la generalidad de la suma de ángulos internos:

Si se sabe que la suma de los ángulos internos (α) de un triángulo es 180° [6], entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 180° \qquad (4)$$

Para saber la suma de los ángulos internos (β) de un cuadrado se puede dividir el cuadrado en dos triángulos y la suma la expresamos como:

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i = 2\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 2(180°) = 360° \qquad (5)$$

Así mismo se puede saber la suma de los ángulos internos (γ) de un pentágono al dividir en tres triángulos y su suma expresarla como:

$$\sum_{i=1}^{5} \gamma_i = 3\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 3(180°) = 540° \qquad (6)$$

De la misma manera se puede expresar la suma de los ángulos internos (Φ) de los siguientes polígonos de n lados en función de triángulos. Notamos que el escalar por el que se multiplica (4) es siempre menor en dos al número de lados del polígono, así que se expresará de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = (n-2)\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = (n-2)180°$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = (n-2)180° \qquad (7)$$

Llamándole a (7) como la generalidad de la sumatoria de los ángulos internos de un polígono de n lados, es obvio que al ser dividida la expresión (7) entre el número de lados (n) de un polígono se obtendrá el valor del ángulo interno (Φ). Entonces tenemos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}{n} = \frac{(n-2)}{n}180° = \phi$$

$$\phi = \frac{(n-2)}{n}180° \qquad (3)$$

III. FÓRMULAS DEDUCTIVAS

A) TRIÁNGULO

Al analizar la construcción de un triángulo equilátero se puede observar en la figura 2 que cuando se traza la altura en dos vértices se obtiene la formación de un triángulo rectángulo. Así que al ocupar este triángulo rectángulo se puede obtener una igualdad que relacione el lado del triángulo equilátero (**L_3**) y el radio (**r**) de la circunferencia circunscrita.

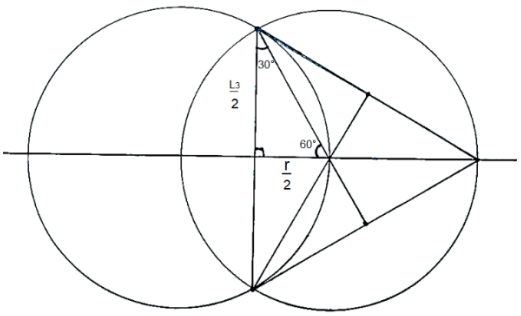


Fig. 2. Triángulo

La fórmula deductiva se puede obtener de dos maneras:

Primera forma:

Debido a la propiedad de rigidez, el triángulo es el único polígono que ha desarrollado una ciencia especial llamada trigonometría, la cual estudia las medidas de los triángulos [2], por dicha razón la primera forma de relacionar **L_3** y **r** es ocupar la función trigonométrica $\tan\frac{\varphi}{2}$.

Si denotamos $\tan\frac{\varphi}{2} = 30°$, entonces:

$$\tan 30° = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{L_3}{2}}$$

$$\tan 30° = \frac{2r}{2L_3} = \frac{r}{L_3}$$

$$r = L_3 \tan 30°$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del triángulo equilátero en función de **r** es:

$$r = \frac{L_3\sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

Y en función de **L_3** es:

$$L_3 = \sqrt{3}r \qquad (8.1)$$

Segunda forma:

La relación de **L_3** y **r** también se puede obtener ocupando el Teorema de Pitágoras.

$$(r)^2 = \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{{L_3}^2}{4} + \frac{r^2}{4}$$

$$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{{L_3}^2}{4} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{3r^2}{4} = \frac{{L_3}^2}{4}$$

$$3r^2 = {L_3}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{{L_3}^2}{3}} = \frac{\sqrt{{L_3}^2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot (1)$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$r = \frac{L_3\sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

B) CUADRADO

En el cuadrado, la relación de **L₄** y **r** se puede obtener al ocupar el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por las diagonales de dicho cuadrado, como se muestra ene la figura 3.

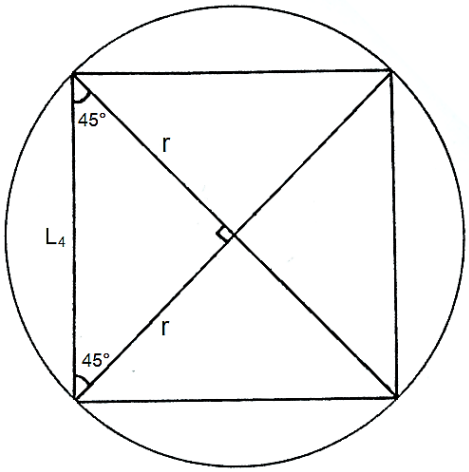


Fig. 3. Cuadrado

Se sabe que la base y la altura del triángulo rectángulo es **r** y su hipotenusa es **L₄**, entonces:

$$L_4{}^2 = r^2 + r^2$$
$$L_4{}^2 = 2r^2$$
$$r^2 = \frac{L_4{}^2}{2}$$
$$r = \sqrt{\frac{L_4{}^2}{2}}$$
$$r = \frac{L_4}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, reduciendo, la fórmula deductiva del cuadrado en función de **r** es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

Y en función a **L₄** es:

$$L_4 = \sqrt{2}r \qquad (9.1)$$

Por otro lado, si se ocupa la función trigonométrica $\sin\varphi$ también se llega a la expresión (9).

$$\sin\varphi = \sin 45° = \frac{r}{L_4}$$
$$r = L_4 \sin 45°$$
$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

C) PENTÁGONO

Teniendo la construcción del pentágono regular se puede trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de éstos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado (**L₅**) del pentágono y el radio (**r**) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica *sin* δ, como se muestra en la figura 4.

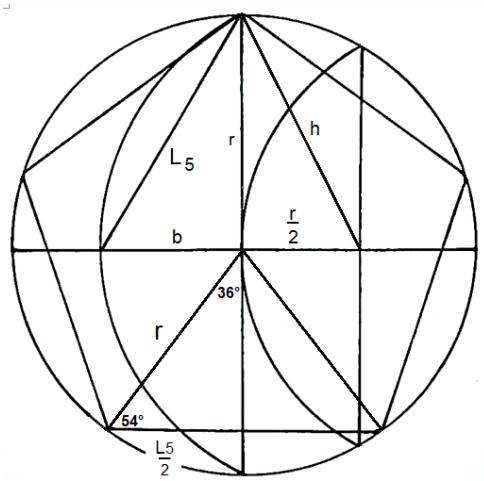


Fig. 4. Pentágono

Si se denota δ = 36°, entonces:

$$\sin 36° = \frac{\frac{L_5}{2}}{r}$$
$$\sin 36° = \frac{L_5}{2r}$$
$$2r = \frac{L_5}{\sin 36°}$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función a **r** del pentágono es:

$$r = \frac{L_5}{2\sin 36°} \qquad (10)$$

Y en función de **L₅** es:

$$L_5 = 2\sin(36°)\, r \qquad (10.1)$$

Además de esta fórmula se puede obtener otra expresión sin ocupar la función trigonométrica sin. Para ello se ocupa el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa L_5 y como cateto mayor **r**. Por ello se averigua primero el valor de **h** para obtener **b**.
Para obtener **h** se ocupa el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$
$$h = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}}$$
$$h = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Se obtiene **b** ahora:

$$b = \frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2}$$

Con **b** ya se puede obtener la relación buscada:

$$(L_5)^2 = (r)^2 + (\frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2})^2$$
$$(L_5)^2 = \frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2}$$
$$L_5 = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2}}$$

Reduciendo se obtiene otra fórmula deductiva en función a $\mathbf{L_5}$ del pentágono:

$$L_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad (10.2)$$

Y en función a **r** es:

$$r = \frac{L_5(5\sqrt{2(5-\sqrt{5})} + \sqrt{10(5-\sqrt{5})})}{20} \qquad (10.3)$$

Como se puede observar (10.3) es más laboriosa por ende se puede ocupar como mejor opción (10) generando el mismo resultado.

D) HEXÁGONO

En el hexágono, la fórmula deductiva se puede obtener al analizar la construcción mostrada; ocupando el triángulo rectángulo y la función trigonométrica $\sin\frac{\varphi}{3}$, como se describe en la figura 5.

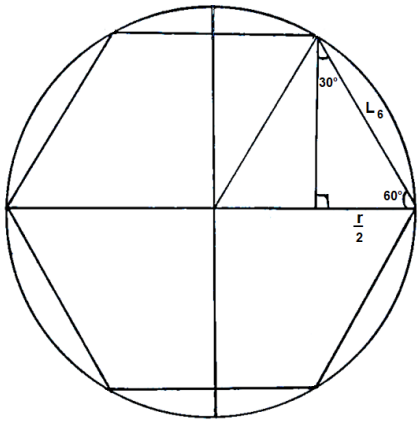


Fig. 5. Hexágono

Si se denota $\sin\frac{\varphi}{3} = 30°$, entonces:

$$\sin 30° = \frac{\frac{r}{2}}{L_6}$$
$$\sin 30° = \frac{r}{2L_6}$$
$$r = 2L_6 \sin 30°$$
$$r = 2L_6\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del hexágono es:

$$r = L_6 \qquad (11)$$

Y en función de $\mathbf{L_6}$:

$$L_6 = r$$

También se obtiene la fórmula deductiva (11) cuando el hexágono se divide en 6 triángulos equiláteros y se observa que **r** es un lado de ese triángulo y $\mathbf{L_6}$ también.

E) HEPTÁGONO

Si se trabaja en el triángulo rectángulo formado en la construcción del heptágono regular, se puede obtener la relación entre $\mathbf{L_7}$ y **r** que buscamos, descrita en la figura 6.

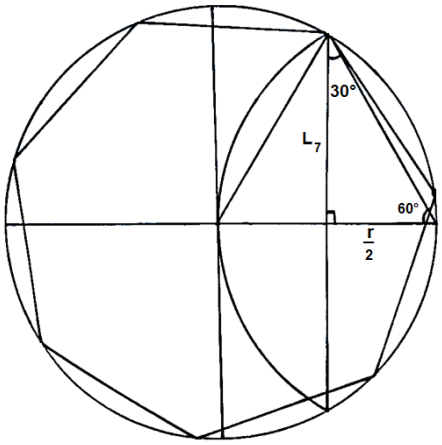


Fig. 6. Heptágono

Al ser ocupada la función trigonométrica tan, donde la altura del triángulo rectángulo es $\mathbf{L_7}$ tenemos:

$$\tan 30° = \frac{\frac{r}{2}}{L_7}$$
$$\tan 30° = \frac{r}{2L_7}$$
$$r = L_7 2 \tan 30°$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del heptágono es:

$$r = \frac{L_7 2\sqrt{3}}{3} \qquad (12)$$

Y en función de $\mathbf{L_7}$ es:

$$L_7 = \frac{\sqrt{3}r}{2} \qquad (12.1)$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

F) OCTÁGONO

En la circunferencia que contiene a un cuadrado, se puede notar que al dividir los lados del cuadrado a la mitad y trazar una línea, que pase por ellos y toque la circunferencia y el centro, obtenemos 8 triángulos rectángulos como en la figura 7; al trabajar con alguno de ellos podemos obtener la relación entre **L_8 y r** con el Teorema de Pitágoras.

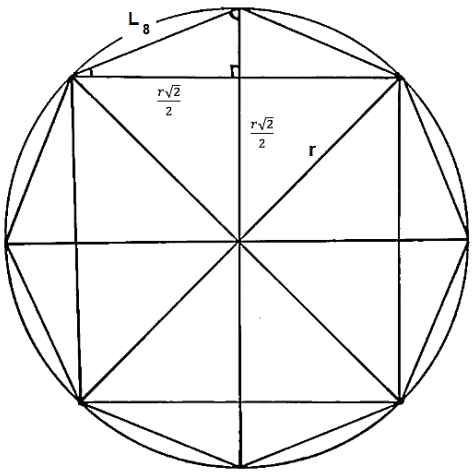


Fig. 7. Octágono

Entonces:

La fórmula deductiva del cuadrado es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \qquad (9)$$

Al escribirla en función de L_4 (9.1) y dividirla entre dos obtenemos:

$$\frac{L_4}{2} = \frac{\sqrt{2}r}{2} \qquad (13)$$

Lo que representa la base del triángulo rectángulo a manejar, para hallar su altura de dicho triángulo simplemente se le resta (13) a **r**.

Al ocupar el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$(L_8)^2 = (\frac{r\sqrt{2}}{2})^2 + (r - \frac{r\sqrt{2}}{2})^2$$
$$(L_8)^2 = \frac{r^2}{2} + r^2 - \sqrt{2}r^2 + \frac{r^2}{2}$$
$$(L_8)^2 = 2r^2 - \sqrt{2}r^2$$
$$L_8 = \sqrt{2r^2 - \sqrt{2}r^2}$$
$$L_8 = \sqrt{r^2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$L_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Escribiendo la fórmula deductiva del octágono, en función de **r,** tenemos:

$$r = \frac{L_8}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \qquad (14)$$

Y en función de **L_8** es:

$$L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ r \qquad (14.1)$$

G) ENEÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del eneágono se puede analizar el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono, descrito en la figura 8.

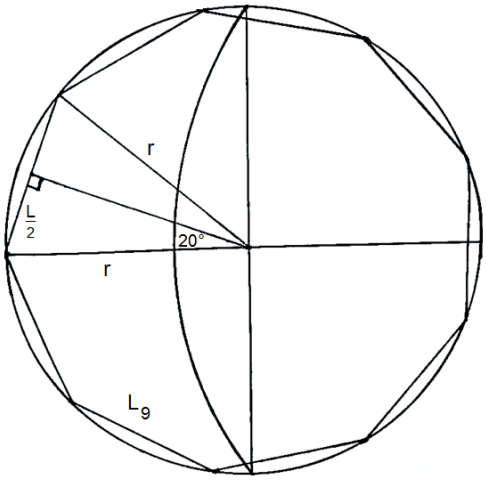


Fig. 8. Eneágono

Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$.
Si se denota $\delta = 20°$entonces:

$$\sin 20° = \frac{\frac{L_9}{2}}{r}$$
$$\sin 20° = \frac{L_9}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del eneágono en función de **r** es:

$$r = \frac{L_9}{2\sin 20°} \qquad (15)$$

Y en función de L_9 es:

$$L_9 = 2\sin 20°\, r \qquad (15.1)$$

H) DECÁGONO

Al analizar la construcción del decágono regular de la figura 9 se nota la formación de un triángulo rectángulo de hipotenusa de tamaño **L_5** (se puede ver en la sección del pentágono), de cateto mayor **r** y cateto menor **L_{10}**. En este triángulo se puede obtener la relación deseada. Ocupando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$L_5{}^2 = r^2 + L_{10}{}^2$$

Donde **L_5** es la fórmula (10.2), por lo tanto:

$$(r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}})^2 = r^2 + L_{10}{}^2$$

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

$$\frac{(5-\sqrt{5})r^2}{2} - r^2 = {L_{10}}^2$$
$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}r^2 - r^2 = {L_{10}}^2$$
$$r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 1\right) = {L_{10}}^2$$
$$r^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = {L_{10}}^2$$
$$L_{10} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})r^2}{2}}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del decágono en función de $\mathbf{L_{10}}$:

$$L_{10} = \frac{r\sqrt{2(3-\sqrt{5})}}{2} \qquad (16)$$

Escribiendo en función de **r** tenemos:

$$r = \frac{L_{10}(3+\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \qquad (16.1)$$

Se puede obtener otra fórmula deductiva del decágono al trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de estos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado ($\mathbf{L_{10}}$) del decágono y el radio (**r**) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica *sin* δ.

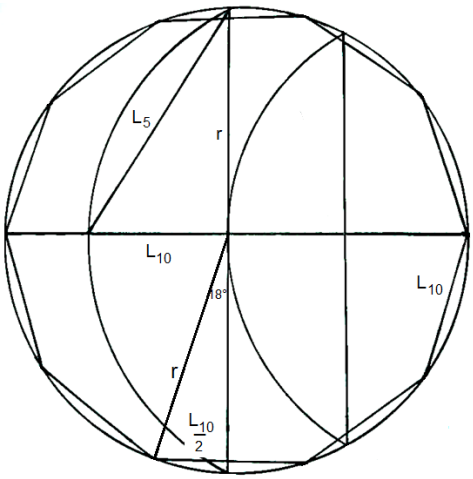


fig. 9. Decágono.

Si se denota δ = 18°, entonces:

$$\sin 18° = \frac{\frac{L_{10}}{2}}{r}$$
$$\sin 18° = \frac{L_{10}}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del decágono en función de $\mathbf{L_{10}}$ es:

$$L_{10} = 2\sin 18°\, r \qquad (16.2)$$

Y en función de **r** es:

$$r = \frac{L_{10}}{2\sin 18°} \qquad (16.3)$$

I) ENDECÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del endecágono se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$ en el triángulo rectángulo formado en la construcción de la figura 10.

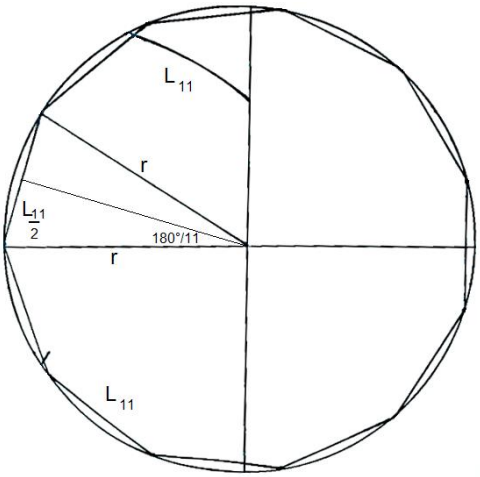


Fig. 10 endecágono

Si se denota $\sin\delta = \frac{180°}{11}$, entonces:

$$\sin\frac{180°}{11} = \frac{\frac{L_{11}}{2}}{r}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del endecágono en función de **r**:

$$r = \frac{L_{11}}{2\sin\frac{180°}{11}} \qquad (17)$$

Escribiendo en función de $\mathbf{L_{10}}$ tenemos:

$$L_{11} = 2\sin\frac{180°}{11}r \qquad (17.1)$$

J) DODECÁGONO

Se puede obtener dos fórmulas deductivas para el dodecágono, como en la figura 11.

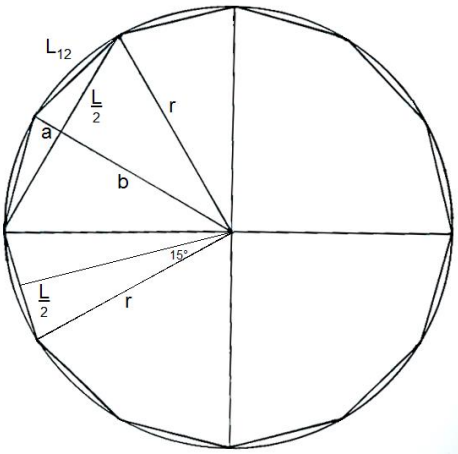


Fig. 11 Dodecágono

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

La primera de ellas se trabaja en el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono. Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin\delta$.
Si se denota $\delta = 15°$entonces:

$$\sin 15° = \frac{\frac{L_{12}}{2}}{r}$$
$$\sin 15° = \frac{L_{12}}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del dodecágono en función a $\mathbf{L_{12}}$ es:

$$L_{12} = 2r \sin 15° \quad (18)$$

Y en función de **r**:

$$r = \frac{L_{12}}{2\sin 15°} \qquad (18.1)$$

La segunda fórmula deductiva se obtiene de una forma más elaborada, se ocupa el Teorema de Pitágoras en triángulo rectángulo formado por hipotenusa $\mathbf{L_{12}}$, cateto mayor **r/2** y cateto menor **a**. Para obtener el valor de **a** se debe obtener primero el valor de **b** en el triángulo rectángulo contiguo.

Se calcula **b** con el Teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{2})^2}$$
$$b = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Teniendo este valor se sabe el valor de **a**.

$$a = r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Se obtiene la relación buscada ocupando de nuevo el Teorema de Pitágoras en el triángulo escaleno donde **a** es el cateto menor. Entonces:

$${L_{12}}^2 = (\frac{r}{2})^2 + (a)^2$$

$${L_{12}}^2 = (\frac{r}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}})^2$$

$$L_{12} = \sqrt{(\frac{r}{2})^2 + (r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}})^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + (r - \frac{\sqrt{3}r}{2})^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})r^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,\sqrt{r^2}$$

Por lo tanto, la otra fórmula deductiva del dodecágono en función a $\mathbf{L_{12}}$ es:

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\, r \qquad (18.3)$$

Y en función de **r**:

$$r = L_{12}\sqrt{\sqrt{3} + 2} \qquad (18.4)$$

IV. ¿CÓMO OCUPAR LAS FÓRMULAS DEDUCTIVAS?

Para el trazo de los diez primeros polígonos regulares manejaremos de la misma manera las fórmulas deductivas presentadas. Dichas fórmulas poseen la característica de relacionar únicamente el tamaño del lado (L) del polígono con el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita. Por tal motivo, podemos tener tres casos:

Caso 1: Si conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el tamaño del lado (L) del polígono buscado. Con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 2: Si conocemos el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el radio (r) de la circunferencia circunscrita. Con el compás, abierto al tamaño del radio (r), trazaremos la circunferencia; después de nuevo con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 3: Si no conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita ni el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces simplemente designaremos un valor (de acuerdo con nuestra conveniencia) para (r) o (L) y lo sustituiremos en la fórmula deductiva.

Después se realizará las mismas instrucciones de trazo del Caso 1 o Caso 2.

V. CONCLUSIONES

El problema de la construcción de los polígonos regulares tiene relación con el problema de la división de la circunferencia en partes iguales; y se puede circunscribir a la circunferencia tantos polígonos regulares como se puede inscribir [4].

Las fórmulas deductivas son una ayuda para el trazo de los polígonos regulares en una circunferencia circunscrita.

En estas líneas se expresan varias de ellas y en algunos casos más de una para el mismo polígono.

En el método tradicional de trazo, por una secuencia de pasos, no todo los polígonos dibujados son exactos; lo mismo ocurre para algunas fórmulas deductivas al ocupar las herramienta (compás y regla) y ejecutar su dinámica.

Cabe señalar que estas fórmulas son una alternativa para la persona y sus necesidades al momento de trazar un polígono regular.

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

REFERENCIAS

[1] Barnett Rich, P:*Plane Geometry*. McGraw-Hill. (N.Y., 1967).

[2] Cuevas, J. N.: *Trigonometría* Vol. 9. LIMUSA (México, 1980)

[3] Wentworth, J. / Smith D.. *Geometry*. Ginn and Company. (Boston, 1972)

[4] Bruño, G. M.. Elementos de Geometría. Bouret. Rue Visconti, (París,1909).

[5] Barnett, R., Thomas, C. Geometry. Schaum´s.. McGraw-Hill. (N.Y.,2017)

© Autor(es) 2020. Artículo de acceso abierto bajo licencia CC BY-NC-ND

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos